

Учреждение образования Республики Беларусь
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

Кафедра ”Физика и электротехника”

Отчёт

по лабораторная работа №3-3

“ИЗУЧЕНИЕ ДИФРАКЦИИ СВЕТА ОТ ЩЕЛИ”.

Выполнил студент гр. Э-12

Иванов П.А.

Проверил преподаватель

Петров Д.Д.

Гомель 2021

Лабораторная работа №3-3

Цель работы: 1. Наблюдение картины дифракции Фраунгофера от одиночной щели. Определение длины световой волны.

2. Экспериментальное определение ширины щели.

Приборы и принадлежности: He-Ne лазер, блок питания лазера, пластинка со щелью, штативы с рег. винтами.

Практическая часть

Задание 1. Определение длины световой волны.

1. Устанавливаем элементы установки согласно рисунка 1.

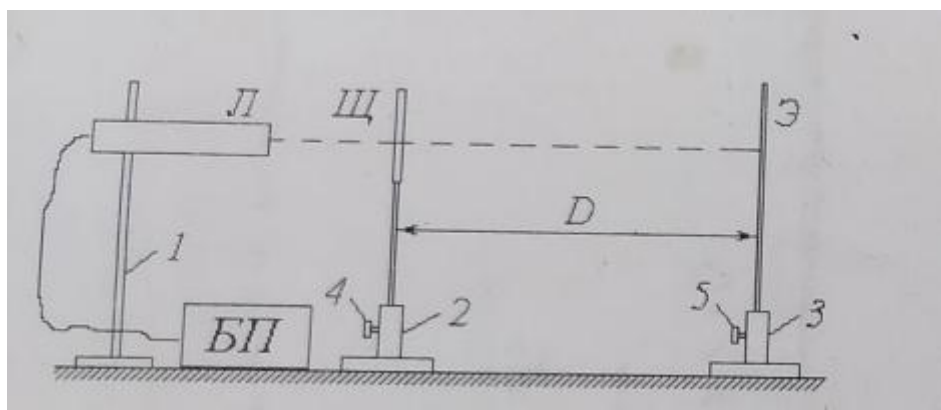


Рисунок 1. Схема экспериментальной установки: 1, 2, 3 – штативы; 4, 5 – регулировочные винты; Л – лазер; БП – блок питания лазера; Щ – пластинка со щелью; Э – экран.

2. Устанавливаем щель на расстоянии порядка 1 метра от экрана.

3. Установим ширину щели, заданную преподавателем ($b = 0,1\text{мм}$).

4. Измеряем с помощью линейки расстояние от щели до экрана (D), а затем расстояние от середины максимума нулевого порядка (наиболее яркого) до центров максимумов 1-го, 2-го, 3-го порядков справа (X_1, X_2, X_3). Измерения проводим три раза. Результаты измерений заносим в таблицу 1.

Таблица 1

m	$X_1, \text{мм}$	$X_2, \text{мм}$	$X_3, \text{мм}$	$D, \text{мм}$	$b, \text{мм}$	$\lambda, \text{нм}$
1	10	15	23	1030	0.1	582.5
2	8	14	21	1035	0.1	637.7
3	9	16	22	1033	0.1	547.6
средние	9	15	22	1033	0.1	589.3

5. Определяем средние значения величин, рассчитываем длину волны света:

$$\bar{X}_1 = \frac{10+8+9}{3} = 9\text{мм}; \bar{X}_2 = \frac{15+14+16}{3} = 15\text{мм}; \bar{X}_3 = \frac{23+21+22}{3} = 22\text{мм};$$

$$\bar{D} = \frac{1030+1035+1033}{3} = 1033\text{мм}; \bar{b} = \frac{0.1+0.11+0.09}{3} = 0.1\text{мм};$$

длину световой волны λ_k определяем по формуле

$$\lambda = \frac{2 \cdot X_k \cdot b}{(2m+1) \cdot D} \quad (k = 1, 2, 3), \text{ тогда: } \lambda_1 = \frac{2 \cdot 9 \cdot 0.1}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 1030} = 582.5\text{нм};$$

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot 15 \cdot 0.11}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 1035} = 637.7\text{нм};$$

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 22 \cdot 0.09}{(2 \cdot 3 + 1) \cdot 1033} = 547.6\text{нм} \text{ и } \bar{\lambda} = \frac{582.5 + 637.7 + 547.6}{3} = 589.3\text{нм}.$$

Результаты вычислений заносим в таблицу 1.

6. Для каждой из величин вычисляем погрешности прямых измерений:

$$\Delta X_{11} = 9 - 10 = -1\text{мм}; \Delta X_{12} = 9 - 8 = 1\text{мм}; \Delta X_{13} = 9 - 10 = 0\text{мм};$$

$$\Delta X_{21} = 15 - 15 = 0\text{мм}; \Delta X_{22} = 15 - 14 = 1\text{мм}; \Delta X_{23} = 15 - 16 = -1\text{мм};$$

$$\Delta X_{31} = 22 - 23 = -1\text{мм}; \Delta X_{32} = 22 - 21 = 1\text{мм}; \Delta X_{33} = 22 - 22 = 0\text{мм};$$

$$\Delta D_1 = 1033 - 1030 = 3\text{мм}; \Delta D_2 = 1033 - 1035 = -2\text{мм};$$

$$\Delta D_3 = 1033 - 1033 = 0\text{мм}; \Delta b = 0\text{мм}.$$

7. Находим среднеквадратичные погрешности серии измерений:

$$\sigma_{X_1} = \sqrt{\frac{(\Delta X_{11})^2 + (\Delta X_{12})^2 + (\Delta X_{13})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(-1)^2 + (1)^2 + (0)^2}{3(3-1)}} = 0.58\text{мм};$$

$$\sigma_{X_2} = \sqrt{\frac{(0)^2 + (1)^2 + (-1)^2}{3(3-1)}} = 0.58\text{мм};$$

$$\sigma_{X_3} = \sqrt{\frac{(-1)^2 + (1)^2 + (0)^2}{3(3-1)}} = 0.58\text{мм};$$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{(\Delta D_1)^2 + (\Delta D_2)^2 + (\Delta D_3)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(3)^2 + (2)^2 + (0)^2}{3(3-1)}} = 1.47\text{мм};$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2 + (\Delta b_3)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(0)^2 + (0)^2 + (0)^2}{3(3-1)}} = 0\text{мм}.$$

8. Используя значение коэффициента Стьюдента $t_\alpha(3) = 4.30$, находим случайные погрешности прямых измерений:

$$\Delta \bar{X}_{cl} = t_\alpha(n) \cdot \sigma_X = 4.30 \cdot 0.58 = 2.49\text{мм};$$

$$\Delta \bar{D}_{cl} = t_\alpha(n) \cdot \sigma_D = 4.30 \cdot 1.47 = 6.32\text{мм};$$

$$\Delta \bar{b}_{cl} = t_\alpha(n) \cdot \sigma_b = 4.30 \cdot 0.0 = 0\text{мм}.$$

9. Оцениваем погрешность средств измерений. Размеры X и D оценивались миллиметровой линейкой, а b микрометрическим винтом

поэтому $\Delta\bar{X}_{нриб} = \Delta\bar{D}_{нриб} = \pm 0.5 \text{ мм}$; а $\Delta\bar{b}_{нриб} = \pm 0.0005 \text{ мм}$, тогда

$$\Delta\bar{X}_{сисм} = \Delta\bar{D}_{сисм} = \frac{t_{\alpha}}{3} \cdot \Delta\bar{X}_{нриб} = \frac{t_{\alpha}}{3} \cdot \Delta\bar{D}_{нриб} = \frac{1.96}{3} \cdot 0.5 \text{ мм} = 0.327 \text{ мм},$$

$$\text{а } \Delta\bar{b}_{сисм} = \frac{t_{\alpha}}{3} \cdot \Delta\bar{b}_{нриб} = \frac{1.96}{3} \cdot 0.0005 \text{ мм} = 0.000327 \text{ мм}.$$

10. Вычисляем границы доверительных интервалов:

$$\Delta\bar{X} = \Delta\bar{D} = \sqrt{(\Delta\bar{X}_{сл})^2 + (\Delta\bar{X}_{сисм})^2} = \sqrt{(\Delta\bar{D}_{сл})^2 + (\Delta\bar{D}_{сисм})^2} = \sqrt{(2.49)^2 + (0.327)^2} = 2.51 \text{ мм};$$

$$\Delta\bar{b} = \sqrt{(\Delta\bar{b}_{сл})^2 + (\Delta\bar{b}_{сисм})^2} = \sqrt{(0)^2 + (0.000327)^2} = 0.000327 \text{ мм}.$$

11. Рассчитываем относительные погрешности прямых измерений

$\varepsilon_X, \varepsilon_D$, и ε_b :

$$\varepsilon_{X_1} = \frac{\Delta\bar{X}}{\bar{X}_1} = 27.8\%; \varepsilon_{X_2} = \frac{\Delta\bar{X}}{\bar{X}_2} = 16.7\%; \varepsilon_{X_3} = \frac{\Delta\bar{X}}{\bar{X}_3} = 11.4\%;$$

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta\bar{D}}{\bar{D}} = 0.24\%; \text{ и } \varepsilon_b = \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}} = 0.326\%.$$

12. Окончательный результат прямых измерений при надёжности $\alpha = 0.95$ записываем в виде:

$$X_1 = \bar{X}_1 \pm \Delta\bar{X} = (9 \pm 2.51) \text{ мм}; X_2 = (15 \pm 2.51) \text{ мм}; X_3 = (22 \pm 2.51) \text{ мм};$$

$$D = (1033 \pm 2.51) \text{ мм}; b = (0.1 \pm 0.000327) \text{ мм}.$$

13. Погрешности косвенных измерений $\Delta\lambda$ рассчитаем на основании результатов расчёта погрешностей прямых измерений по формуле:

$$\Delta\lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial X_1}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{X})^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial D_1}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{D})^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial b_1}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{b})^2};$$

$$\Delta\lambda_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial X_2}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{X})^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial D_2}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{D})^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial b_2}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{b})^2};$$

$$\Delta\lambda_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial X_3}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{X})^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial D_3}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{D})^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial b_3}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{b})^2},$$

где $\lambda = \frac{2 \cdot X \cdot b}{(2m+1) \cdot D}$, а $\frac{\partial\lambda}{\partial X}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial D}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial b}$ – частные производные. Находим

частные производные:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2 \cdot \bar{X} \cdot \bar{b}}{(2m+1) \cdot \bar{D}} \right) = \frac{2 \cdot \bar{b}}{(2m+1) \cdot \bar{D}}; \frac{\partial\lambda}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{2 \cdot \bar{X} \cdot \bar{b}}{(2m+1) \cdot \bar{D}} \right) = -\frac{2 \cdot \bar{X} \cdot \bar{b}}{(2m+1) \cdot \bar{D}^2};$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{2 \cdot \bar{X} \cdot \bar{b}}{(2m+1) \cdot \bar{D}} \right) = \frac{2 \cdot \bar{X}}{(2m+1) \cdot \bar{D}}.$$

Рассчитываем значения производных и подставляем в формулы для $\Delta\lambda$:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial X_1} = \frac{2 \cdot \bar{b}}{(2m+1) \cdot \bar{D}} = \frac{2 \cdot 0.1}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 1033} = 0.0000645; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial X_2} = \frac{2 \cdot 0.1}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 1033} =$$

$$= 0.0000387; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial X_3} = \frac{2 \cdot 0.1}{(2 \cdot 3 + 1) \cdot 1033} = 0.0000276;$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial D_1} = \frac{\partial}{\partial D_1} \left(\frac{2 \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot \bar{D}} \right) = - \frac{2 \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot \bar{D}^2} = - \frac{2 \cdot 9 \cdot 0.1}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 1033^2} = 0.00000056;$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial D_2} = \frac{\partial}{\partial D_2} \left(\frac{2 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot \bar{D}} \right) = - \frac{2 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot \bar{D}^2} = - \frac{2 \cdot 15 \cdot 0.1}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 1033^2} = 0.00000056;$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial D_3} = \frac{\partial}{\partial D_3} \left(\frac{2 \cdot \bar{X}_3 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 3 + 1) \cdot \bar{D}} \right) = - \frac{2 \cdot \bar{X}_3 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 3 + 1) \cdot \bar{D}^2} = - \frac{2 \cdot 22 \cdot 0.1}{(2 \cdot 3 + 1) \cdot 1033^2} = 0.00000059;$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b_1} = \frac{\partial}{\partial b_1} \left(\frac{2 \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot \bar{D}} \right) = \frac{2 \cdot \bar{X}_1}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot \bar{D}} = \frac{2 \cdot 9}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 1033} = 0.0058;$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b_2} = \frac{\partial}{\partial b_2} \left(\frac{2 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot \bar{D}} \right) = \frac{2 \cdot 15}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 1033} = 0.0058;$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b_3} = \frac{\partial}{\partial b_3} \left(\frac{2 \cdot \bar{X}_3 \cdot \bar{b}}{(2 \cdot 3 + 1) \cdot \bar{D}} \right) = \frac{2 \cdot 22}{(2 \cdot 3 + 1) \cdot 1033} = 0.0061;$$

$$\Delta\lambda_1 = \sqrt{\left(6.45 \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot (2.51)^2 + \left(5.6 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot (2.51)^2 + \left(5.8 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot \left(3.27 \cdot 10^{-4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2.62 \cdot 10^{-8} + 1.97 \cdot 10^{-12} + 3.59 \cdot 10^{-12}} = 1.62 \cdot 10^{-4} \text{ мм};$$

$$\Delta\lambda_2 = \sqrt{\left(3.87 \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot (2.51)^2 + \left(5.6 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot (2.51)^2 + \left(5.8 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot \left(3.27 \cdot 10^{-4}\right)^2} =$$

$$= 9.7 \cdot 10^{-5} \text{ мм};$$

$$\Delta\lambda_3 = \sqrt{\left(2.76 \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot (2.51)^2 + \left(5.9 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot (2.51)^2 + \left(6.1 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot \left(3.27 \cdot 10^{-4}\right)^2} =$$

$$= 6.9 \cdot 10^{-5} \text{ мм}.$$

$$\Delta\lambda_{cp} = \frac{1.62 + 0.97 + 0.69}{3} \cdot 10^{-4} = 1.09 \cdot 10^{-4} \text{ мм} = 109 \text{ нм}.$$

Окончательный результат опр. длины волны:

$$\lambda = \bar{\lambda} \pm \Delta\lambda = (589 \pm 109) \text{ нм}.$$

Задание 2. Определение ширины щели.

1. Устанавливаем произвольно ширину щели.
2. Измеряем с помощью линейки расстояние от щели до экрана (D), а затем расстояние от середины максимума нулевого порядка (наиболее яркого) до центров максимумов 1-го, 2-го, 3-го порядков справа (X_1, X_2, X_3). Измерения проводим три раза. Результаты измерений заносим в таблицу 2.

Таблица 2

m	$X_1, \text{мм}$	$X_2, \text{мм}$	$X_3, \text{мм}$	$D, \text{мм}$	$\lambda, \text{нм}$	$b, \text{мм}$
1	10	15	21	1030	589.3	0.091
2	9	14	19	1035	589.3	0.169
3	11	16	20	1033	589.3	0.194
средние	10	15	20	1033	589.3	0.151

8. Вычисляем ширину щели по формуле:

$$b = \frac{(2k+1) \cdot D \cdot \lambda}{2 \cdot X_k}, \text{ где } k=1, 2, 3:$$

$$b_1 = \frac{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 1030 \cdot 0.0005893}{2 \cdot 10} = 0.091 \text{ мм};$$

$$b_2 = \frac{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 1035 \cdot 0.0005893}{2 \cdot 9} = 0.169 \text{ мм};$$

$$b_3 = \frac{(2 \cdot 3 + 1) \cdot 1033 \cdot 0.0005893}{2 \cdot 11} = 0.194 \text{ мм};$$

$$b_{cp} = \frac{0.091 + 0.169 + 0.194}{3} = 0.151 \text{ мм}.$$

8. Выводы.

В ходе выполнения работы мы изучили явление дифракции света и определили длину волны излучения источника света $\lambda = (589 \pm 109) \text{ нм}$.

Определили ширину щели $b = 0.151 \text{ мм}$.

ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Дифракцией света называется явление отклонения света от прямолинейного направления распространения при прохождении вблизи препятствий. Как показывает опыт, свет при определенных условиях может заходить в область геометрической тени.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Явление дифракции можно объяснить исходя из принципа Гюйгенса-Френеля.

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка фронта волны рассматривается как точечный источник элементарных вторичных сферических волн. Поверхность, огибающая эти элементарные волны, является новым положением фронта волны.

Для объяснения интерференции, дифракции, прямолинейности распространения света и т.п. Френель дополнил принцип Гюйгенса рядом постулатов:

1. Источник света можно заменить эквивалентной ему системой точечных когерентных источников вторичных сферических волн, расположенных на произвольной волновой поверхности. Положение фронта волны в последующий момент времени определяется как результат интерференции волн от этих источников.

2. Мощности, излучаемые участками поверхности, определяются амплитудой дошедшего до каждого участка излучения.

3. Амплитуда излучения уменьшается с увеличением угла между направлением распространения света и нормалью к волновой поверхности.

4. Амплитуда сферической волны убывает в зависимости от расстояния до источника по закону $1/r$. Заметим, что для плоской волны амплитуда от

расстояния не зависит вообще, т.е. множитель $1/r$ в формуле (1) будет отсутствовать.

5. При наличии непрозрачных экранов, совпадающих с выбранной системой точечных вторичных источников, «закрытые» участки не излучают, а «открытые» излучают независимо от материала, формы и размеров препятствий.

Применим принцип Гюйгенса-Френеля для расчета амплитуды световой волны. (Рис. 1).

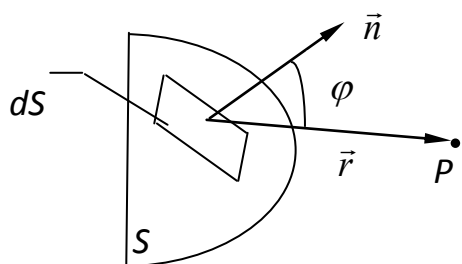


Рис. 1

Каждый элемент dS волновой поверхности S служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна площади элемента dS . Результирующее колебание в произвольной точке P , лежащей вне фронта волны, определяется как результат интерференции вторичных волн, излучаемых всеми элементами dS . Следовательно, от каждого участка dS волновой поверхности S в точку P приходит колебание

$$dA(t) = f(\varphi) \frac{A_0 dS_n}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0), \quad (1)$$

где $\omega t + \alpha_0$ - фаза колебания в месте расположения волновой поверхности;

$k=2\pi/\lambda$ – волновое число;

A_0 - амплитуда колебания в том месте, где находится dS ;

$f(\varphi)$ - коэффициент, зависящий от угла φ между нормалью \vec{n} к dS и направлением от dS к P (радиус-вектором \vec{r});

dS_n – проекция площадки dS на плоскость перпендикулярную вектору r .

При $\varphi = 0$ этот коэффициент максимален, при $\varphi = \pi/2$ обращается в нуль, при $0 < \varphi < \pi/2$ - принимает некоторое промежуточное значение.

Результирующее колебание в точке P представляет собой сумму колебаний (1), даваемых всей волновой поверхностью S :

$$A(t) = \int_S f(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0) dS. \quad (2)$$

Эта формула является аналитическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля.

Зоны Френеля

Вычисления по формуле (2) представляют собой в общем случае очень трудную задачу. Однако, как показал Френель, в случаях, отличающихся

симметрией, нахождение амплитуды результирующего колебания может быть осуществлено не интегрированием, а алгебраическим суммированием.

Для примера определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке P сферической волной (т.е. волной со сферическим фронтом), распространяющейся в изотропной однородной среде от точечного источника S (рис.2).

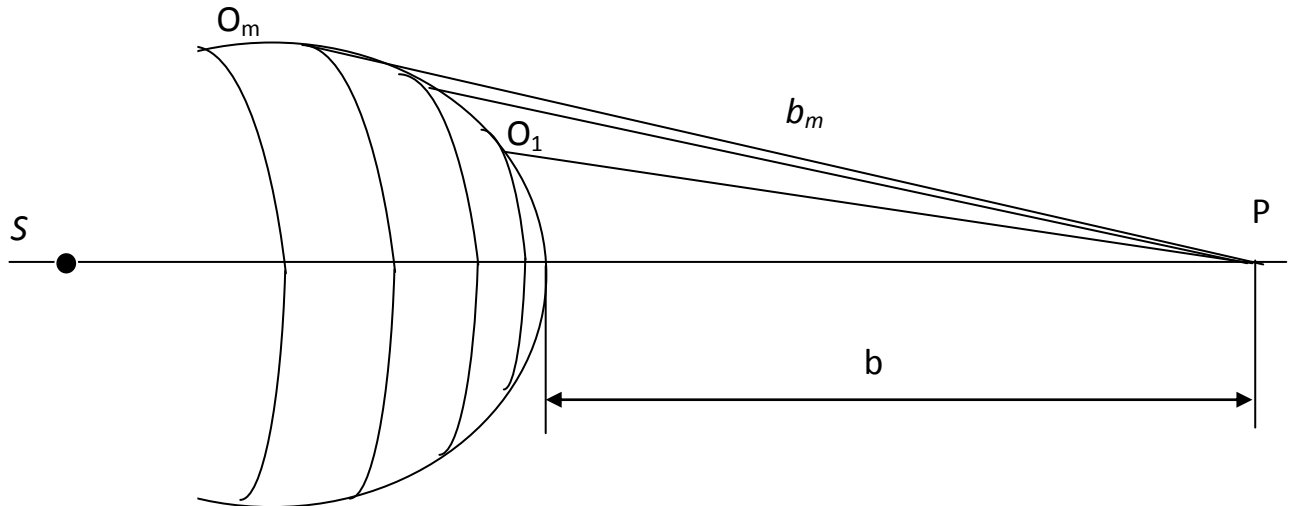


Рис. 2

Фронт такой волны симметричен относительно прямой SP . Пользуясь этим, разобьем фронт волны $O O_1 O_2 \dots O_m$ на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\lambda/2$ (где λ – длина световой волны), т.е.

$$O_1P - OP = O_2P - O_1P = O_3P - O_2P = \dots = \lambda/2 .$$

Если обозначить $OP = b$, $O_1P = b_1$, $O_2P = b_2 \dots O_mP = b_m$, то очевидно, что $b_m = b + m\lambda/2$.

Колебания, приходящие в точку P от аналогичных точек двух соседних зон (т.е. от точек, лежащих в середине зон или у внешних краев зон и т.д.), находятся в противофазе, т.к. имеют разность хода $\lambda/2$. Поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из зон в целом, будут для соседних зон происходить в противофазе, т.е. отличаться по фазе на π .

Можно доказать, что площади зон Френеля примерно одинаковы. Расстояние b_m от зоны до точки P медленно растет с номером зоны m .

Угол φ между нормалью к элементам зоны и направлением на точку P также растет с увеличением m .

Все это приводит к тому, что амплитуда A_m колебания, возбуждаемого m -й зоной в точке P , монотонно убывает с ростом m . Таким образом, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке P зонами Френеля, образуют монотонное убывающую последовательность

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m \dots \quad (3)$$

Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, в точке P противоположны, т.е. отличаются на π . Поэтому амплитуда A результирующего колебания в точке P будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m \quad (4)$$

В это выражение все амплитуды волн от нечетных зон входят с одним знаком, а от четных – с другим.

Отметим, что в зависимости от формы фронта волны, соотношение (3) между амплитудами колебаний, даваемых отдельными зонами, может быть другим, но соотношение (4) остается справедливым

В частности, для плоской волны при постоянных значениях угла φ и площади зон $A_1 = A_2 = A_3 \dots = A_m$ и соотношение (4) дает в результате

$$A = 0 \text{ при } m = 2k \text{ (четном числе зон),} \quad (4a)$$

$$A = A_1 \text{ при } m = 2k+1 \text{ (нечетном числе зон) (} k=1,2,3 \dots \text{)} \quad (4б)$$

Дифракция от щели

Пусть на бесконечно длинную щель падает плоская волна. Практически щель можно считать бесконечно длинной, если ее длина во много раз превышает ширину. Ширина щели соизмерима с длиной волны.

Поместим за щелью ЦЩ собирающую линзу ЛЛ, а в фокальной плоскости линзы экран ЭЭ (рис 3). Фронт падающей волны, плоскость щели и экран параллельны друг другу. Так как щель бесконечна, то картинка, наблюдаемая в любой плоскости, перпендикулярной к щели, будет одинакова. Поэтому достаточно исследовать характер картины в одной такой плоскости (например, в плоскости чертежа). Разобьем открытую часть волновой поверхности на параллельные краям щели зоны шириной dx . Вторичные волны, посылаемые этими зонами под произвольным углом φ , будут собраны линзой в точке экрана P' . Каждая зона создает в точке P' колебания с амплитудой dA .

Линза собирает в фокальной плоскости плоские (а не сферические) волны, поэтому множитель $1/r$ в формуле (1) будет отсутствовать.

Если рассматривать волны, идущие от щели под определенным постоянным углом φ , то коэффициент $f(\varphi)$ в формуле (1) можно считать постоянным.

Тогда амплитуда колебания, возбуждаемого зоной шириной dx в точке P' экрана, будет зависеть только от площади зоны. Площадь зоны пропорциональна ее ширине dx . Следовательно, амплитуда колебания dA возбуждаемого зоной шириной dx , $dA = cdx$, где $c = \text{const}$.

Обозначим амплитуду результирующего колебания, создаваемого всеми зонами через A_0 . Тогда, если ширина щели равна b ,

$$A_0 = \int_0^b dA = \int_0^b cdx = cb. \text{ Отсюда } c = A_0 / b, \text{ следовательно}$$

$$dA = \frac{A_0}{b} dx.$$

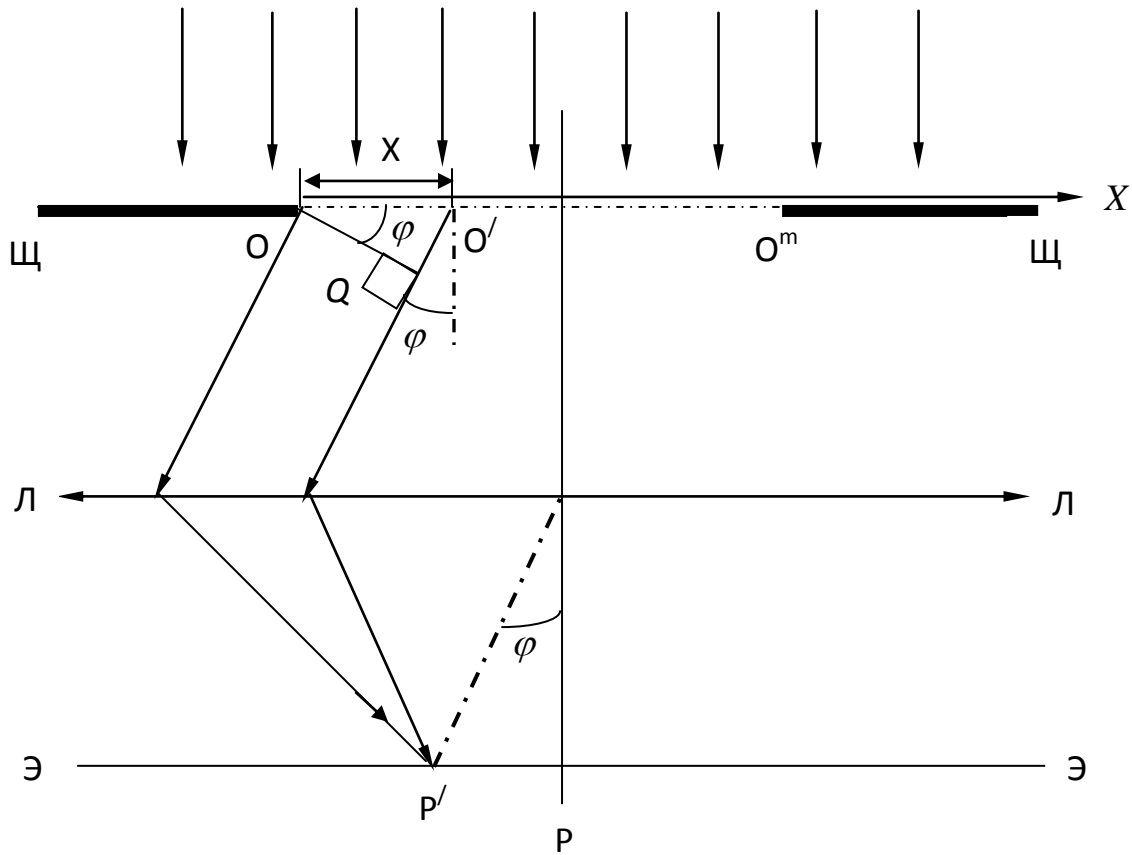


Рис. 3

Теперь сопоставим фазы колебания, возбуждаемых в точке P' , элементарными зонами с координатами O и X (см. рис. 3). Оптические пути OP' и $O'P'$ таутохронны, т.е. проходятся светом за одно время, поскольку линза ЛЛ не вносит никакой дополнительной разности хода. Так как линия OQ представляет собой фронт волны, дифрагированной в направлении φ , то разность хода двух волн, прошедших через точки O и O' , имеющие координаты O и X , соответственно, и пришедших в точку P' , равна $|O'Q|$. Обозначим $|O'Q| = \Delta$, тогда из рисунка видно, что $\Delta = x \sin \varphi$. Таким образом разность фаз между двумя волнами, прошедших через точки O и O' равна

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi.$$

Если фаза колебания, приходящего из точки $x = 0$ равна ωt , то фаза колебания, приходящего из точки x , равна

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi.$$

Значит колебание, возбуждаемое зоной с координатой X в точке P' , положение которой определяется углом φ , запишется

$$dA(t) = \frac{A_0}{b} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi\right) dx.$$

Тогда результирующее колебание, созданное всем открытым участком фронта волны в произвольной точке P' , имеет вид:

$$A(t) = \int_0^b \frac{A_0}{b} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) dx = A_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right).$$

Величина

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi} \quad (5)$$

не зависит от времени, поэтому имеет смысл амплитуды результирующего колебания, возбуждаемого в точке P' , положение которой определяется углом φ , открытым щелью участком фронта волны.

Для точки P угол $\varphi = 0$. Для этой точки экрана формула (5) дает для амплитуды значение A_0 .

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, согласно (5)

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2}, \quad (6)$$

где I_0 - интенсивность в центре дифракционной картины;

I_φ - интенсивность в точке, определяемой углом φ .

Из (6) следует, что дифракционная картина симметрична относительно центра экрана, т.к. величина I_φ не зависит от того, какой знак имеет φ .

Из анализа формулы (6) видно, что I_φ имеет максимальные значения при

$$\begin{aligned} \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi &= (2m + 1) \frac{\pi}{2}, & (m = 0, 1, 2 \dots). & \text{Отсюда следует, что} \\ b \sin \varphi &= (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, & (m = 0, 1, 2 \dots). & \end{aligned} \quad (7)$$

Формула (7) выражает условие максимума интенсивности при дифракции света от одной щели.

Условие минимума интенсивности можно получить, если предположить, что в формуле (6)

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = m \pi, \quad (m = 0, 1, 2 \dots).$$

Отсюда следует, что
 $b \sin \varphi = m\lambda$, или

$$b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2 \dots). \quad (8)$$

Формула (8) выражает условие минимума интенсивности при дифракции света от одной щели.

Формулы (7) и (8) могут быть получены также с использованием метода зон Френеля (см. выше).

Так как разность хода двух волн, идущих от краев щели (точки O и O^m) равна $b \sin \varphi$, а разность хода волн, идущих от соседних зон Френеля равна $\lambda/2$, то число зон можно определить как $\frac{b \sin \varphi}{\lambda/2}$.

Если это число $m = 2k$ (четное), то в соответствии с формулой (4а) получим условие минимума амплитуды:

$$\frac{b \sin \varphi}{\lambda} = 2k, \quad \text{или} \quad b \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (\text{сравните с формулой (8)}).$$

Аналогично можно получить условие максимума амплитуды.

На рисунке 4 представлен график функции I_φ в зависимости от значений величины $\frac{b \sin \varphi}{\lambda}$.

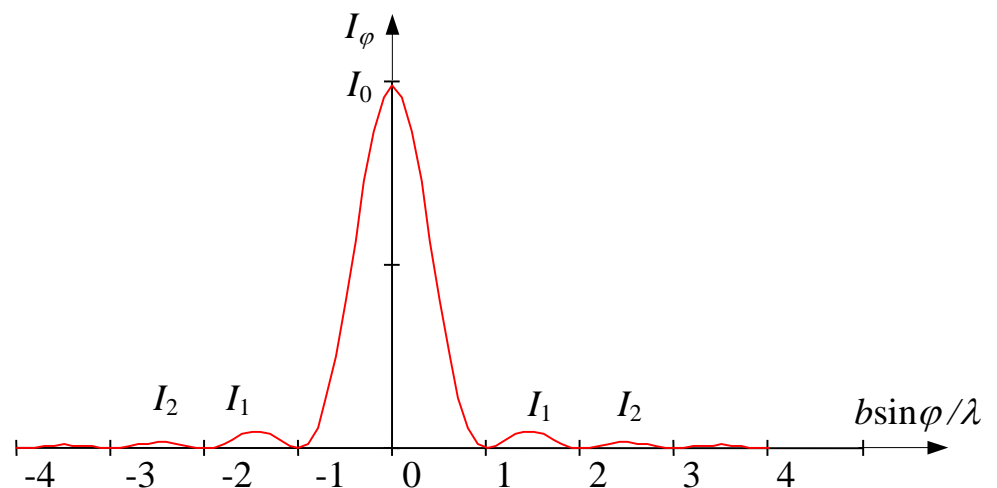


Рис.4

Продолжая анализ формулы (6), можно сравнить интенсивность дифракционных максимумов различных порядков. Если принять интенсивность нулевого (центрального) максимума за 100 %, то интенсивности максимумов 1-го, 2-го, 3-го и т.д. порядков составляют, соответственно, 4,5 %, 1,6 %, 0,8 % и т.д.

Таким образом, центральный максимум значительно превосходит по интенсивности остальные максимумы, и в нем сосредоточена основная доля светового потока, проходящего через щель. Эти выводы справедливы, если ширина щели b не очень велика по сравнению с длиной волны λ .

Если b меньше λ , то все максимумы очень широки и дифракционная картина малоконтрастная. Интенсивность всех максимумов в этом случае очень мала.

Если b на много больше λ , то центральный максимум очень узкий и яркий, т.е. фактически представляет собой изображение источника света, даваемое линзой. Интенсивность остальных максимумов в этом случае пренебрежимо мала.

Если осветить щель белым светом, то в первом случае, как это следует из формулы (7), для всех m (кроме $m = 0$) каждой длине волны λ , соответствует свое направление на максимум φ . Таким образом все максимумы, кроме центрального, развернутся в спектры, причем коротковолновые стороны этих спектров расположены ближе к центру дифракционной картины. Нулевой максимум остается белым, т.к. при $m = 0$ угол φ равен нулю для любой длины волны.

Вывод расчетной формулы

Пусть координата m -го максимума равна y_m (рис. 5), где m - порядок максимума, а расстояние от щели до экрана равно X . Тогда из треугольника y_mAO имеем:

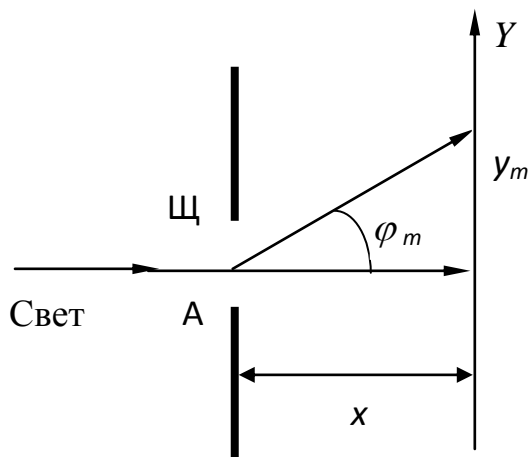


Рис. 5

$$\sin \varphi_m = \frac{y_m}{\sqrt{x^2 + y_m^2}}.$$

Так как $y_m \ll x$, то последнее выражение можно записать в виде:

$$\sin \varphi_m = \frac{y_m}{x}.$$

С другой стороны, из формулы (7) имеем:

$$\sin \varphi_m = \frac{(2m+1)\frac{\lambda}{2}}{b} = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{b}.$$

Приравняв правые части двух последних выражений, получим

$$\frac{y_m}{x} = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{b}, \text{ откуда}$$

$$\lambda = \frac{y_m b}{(m + \frac{1}{2})x}. \quad (9)$$