Динамика материальной точки.
Основные понятия и формулы.

Масса тела m – физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи определяющая её инерционные и гравитационные свойства.

Физическая сила $\vec{F}$ – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

В механике мы рассматриваем различные силы:

силу тяжести

$$\vec{F}_m = m\vec{g},$$

где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения;

силы упругой деформации при растяжении (сжатии)

$$\vec{F} = -k\vec{x} \text{ либо } \sigma = E\frac{\Delta l}{l_0},$$

где $k = \frac{ES}{l_0}$ – коэффициент упругости (жесткости), $\sigma = F/S$ – механическое напряжение, E – модуль Юнга, $\Delta l = |\vec{x}|$ – абсолютное удлинение (сокращение) тела при деформации;

силу трения скольжения

$$\vec{F}_{mp} = \mu\vec{N},$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила реакции опоры (сила нормального давления на опору). Сила трения покоя меняет свое значение от нуля до величины силы трения скольжения $\vec{F}_{mp}$;

силу трения качения

$$\vec{F} = \frac{\mu_k \vec{N}}{r},$$

где μ_k – коэффициент трения качения; r – радиус катящегося тела;

силу гравитационного притяжения

$$\vec{F}_T = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r},$$

где $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/кг$\cdot$с^2 – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих объектов, $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий объекты, r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$ (расстояние между объектами);

силу Архимеда

$$\vec{F}_A = \rho\vec{g}V,$$

где ρ – плотность жидкости или газа, V – объем погруженной в жидкость или газ части тела.

Импульс, количество движения – мера механического движения, равная для материальной точки произведению ее массы m на вектор ее скорости $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Импульс механической системы равен векторной сумме импульсов всех n материальных точек системы или произведению массы всей системы m на скорость ее центра масс $\vec{\upsilon}_c$:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c.$$

Скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-той материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Координаты центра масс системы материальных точек:

радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m};$$

в координатной форме

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m};\; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m};\; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m},$$

где m_i, $\vec{r}_i$, x_i, y_i, z_i – соответственно масса, радиус-вектор и координата i – той материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const}.$$

При решении задач формулировка первого закона Ньютона полезна в следующей форме: если результирующая всех сил, действующих на материальную точку (тело), равна нулю, то тело покоится или совершает равномерное и прямолинейное движение.

Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки): скорость изменения импульса точки равна равнодействующей силе, действующей на точку:

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\sum_{i=1}^{k}\vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующих на тело массой m; k – число действующих сих.

В проекциях на касательную и нормаль к траектории точки это же уравнение будет иметь вид

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}; \qquad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Все силы в природе являются силами взаимодействия. Этот факт выражает суть третьего закона Ньютона: с какой силой тело 1 действует на тело 2, с такой же силой, но противоположной по направлению, тело 2 действует на тело 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p,$$

где $\vec{F}_p = -\vec{u}\frac{dm}{dt}$ – реактивная сила ($\vec{u}$ – скорость истечения газов из ракеты).

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta S\cos(\alpha),$$

где α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$, $\Delta S = |\Delta\vec{r}|$ – элементарный путь.

Работа, совершаемая переменной силой на пути s,

$$A = \int_S \vec{F}d\vec{r} = \int_S F_s ds = \int_S F\cos\alpha ds,$$

где $\vec{F}_S$ – проекция вектора силы на вектор перемещения $d\vec{r}$, $dS = |d\vec{r}|$ – модуль вектора перемещения.

Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N\rangle = \frac{A}{\Delta t}.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} \text{ или } N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F_s\upsilon = F\upsilon\cos\alpha.$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенциальная энергия

упругих сил

$$E_П = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости, x – абсолютная деформация;

гравитационного взаимодействия двух тел

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r^2};$$

тéла, находящегося в однородном гравитационном поле,

$$E_П = mgh,$$

где h – высота над уровнем, принимаемым за нулевой (для консервативной системы).

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией тела

$$\vec{F} = -gradE_{\Pi} = -(\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z}\vec{k}),$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы, то механическая энергия сохраняется:

$$E = E_К + E_П = \text{const}.$$

Если кроме консервативных сил действуют неконсервативные, то изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил:

$$E_2 - E_1 = A.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся до удара со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ соответственно, после абсолютно упругого центрального удара

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1 + 2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}; \qquad \vec{\upsilon}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся соответственно со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, после абсолютно неупругого центрального удара

$$\upsilon = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон всемирного тяготения в скалярной форме

$$F_T = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F_T – сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух тел массами m_1 и m_2, движущихся соответственно со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$; r – расстояние между точками.

Напряженность поля тяготения

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где $\vec{F}$ – сила тяготения, действующая на тело массой m, помещенное в данную точку поля.

Работа в поле тяготения, создаваемого объектом массой M по перемещению тела массой m:

$$A = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{E_П}{m},$$

где $E_П$ – потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

Потенциал поля тяготения, создаваемый телом массой M,

$$\varphi_П = -\frac{GM}{R},$$

где R – расстояние от центра тела до рассматриваемой точки.

Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью:

$$\vec{g} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Знак «минус» в формуле показывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала.

Третий закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 – периоды обращения планет вокруг Солнца; R_1 и R_2 – большие полуоси орбит этих планет.

Первая космическая скорость

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_З}{r}} = \sqrt{gR_З} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

где $M_З$, $R_З$ – соответственно масса и радиус Земли, r – радиус круговой орбиты, G – гравитационная постоянная.

Вторая космическая скорость

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM_З}{r}} = \sqrt{2gR_з} = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{ин},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ – соответственно ускорения тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета; $\vec{F}_{ин}$ – силы инерции.

Силы инерции

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_и + \vec{F}_ц + \vec{F}_к,$$

где $\vec{F}_и$ – силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением $\vec{a}_0$,

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_0;$$

$F_ц$ – центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R),

$$F_ц = -m\omega^2 R;$$

$\vec{F}_к$ – сила Кориолиса (сила инерции, действующая на тело, движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}'$ во вращающейся системе отсчета),

$$\vec{F}_к = 2m\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right].$$