Примеры решения задач по атомной и ядерной физике

Пример 1. Электрон в атоме водорода перешел с четвертого энергетического уровня на второй. Определить энергию испущенного при этом фотона.

Решение. Для определения энергии фотона воспользуемся сериальной формулой для водородоподобных ионов:

$$1/\lambda = RZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2)\,, \qquad (1)$$

где λ — длина волны фотона; R — постоянная Ридберга: Z—заряд ядра в относительных единицах (при Z=1 формула переходит в сериальную формулу для водорода); n_1 — номер орбиты, на которую перешел электрон; n_2 — номер орбиты, с которой перешел электрон (n_1 и n_2 — главные квантовые числа).

Энергия фотона ε выражается формулой

$$\varepsilon = hc/\lambda\,.$$

Поэтому, умножив обе части равенства (1) на hc получим выражение для энергии фотона:

$$\varepsilon = RhcZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2)\,.$$

Так как Rhc есть энергия ионизации E_i, атома водорода, то

$$\varepsilon = E_iZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2)\,.$$

Вычисления выполним во внесистемных единицах: E_i=13,6 эВ ; Z=1; n_1=2; n_2= 4

$$\varepsilon = 13{,}6\cdot 1^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)эВ = 13{,}6\cdot 3/16 эВ = 2{,}55 эВ\,.$$

Пример 2. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля электрона для двух случаев:
1) U_1= 51 В; 2) U_2= 510 кВ.

Решение. Длина волны де Бройля для частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = h/p\,, \qquad (1)$$

где h — постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия T. Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда , кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы). В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0T}\ , \qquad (2)$$

где m_0 — масса покоя частицы.

В релятивистском случае

$$p = \sqrt{(2E_0 + T)T}\,/\,c\,, \qquad (3)$$

где $E_0 = m_0c^2$—энергия покоя частицы**.**

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется:

в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}}\,, \qquad (4)$$

в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{(2E_0 + T)T}\,/\,c}\,, \qquad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов U_1=51В и U_2=510кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (4) или (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U,

$$T = eU.$$

В первом случае $T_1 = eU = 5$ эВ= $0{,}51 \odot 10^{-4}$ МэВ, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0c^2$= 0,51 МэВ. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (4). Для упрощения расчетов заметим, что $T_1 = 10^{-4}\ m_0c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} \cdot m_0c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\frac{h}{m_0c}\,.$$

Учитывая, что h/m_0c есть комптоновская длина волны Λ, получаем

$$\lambda_1 = 10^2\Lambda/\sqrt{2}\,.$$

Так как Λ=2,43пм , то

$$\lambda_1 = 10^2 \cdot 2{,}43/\sqrt{2}\text{пм} = 171\text{пм}$$

Во втором случае кинетическая энергия $T_2 = eU_2 = 510$ кэВ= $=0,51$ МэВ, т. е. равна энергии покоя электрона. В этом случае необходимо применить релятивистскую формулу (5). Учитывая, что $T_2 = 051$ МэВ$=m_0c^2$, по формуле (5) находим

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2 / c}} = \frac{h}{\sqrt{3}m_0c}$$

или

$$\lambda_2 = \Lambda / \sqrt{3}\,.$$

Подставим значение Λ и произведем вычисления:

$$\lambda_2 = 2{,}43 / \sqrt{3}\text{пм} = 1{,}40\text{пм}\,.$$

Пример 3. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка $T = 10$ эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar\,, \qquad (1)$$

где Δx — неопределенность координаты частицы (в данном случае электрона); Δp_x —неопределенность импульса частицы (электрона); $\hbar$—постоянная Планка.

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = l / 2$$

Соотношение неопределенностей (1) можно записать в этом случае в виде

$$(l / 2)\Delta p_x \geq \hbar\,,$$

откуда

$$l \geq 2\hbar / \Delta p_x \qquad (2)$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp_x во всяком случае не должна превышать значения самого импульса p_x, т. е. $\Delta p_x \leq p_x$. Импульс p_x связан с кинетической энергией T соотношением

$p_x = \sqrt{2mT}$. Заменим Δp_x значением $\sqrt{2mT}$ (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{\min} = 2\hbar / \sqrt{2mT}\,. \qquad (3)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу длины. Для этого в правую часть формулы (3) вместо символов величин подставим обозначения их единиц:

$$\frac{[\hbar]}{([m][T])^{1/2}} = \frac{1Дж \cdot с}{(1кг \cdot 1Дж)^{1/2}} = (\frac{1Дж}{1кг})^{1/2} \cdot 1с = (\frac{1кг \cdot м^2 / с^2}{1кг})^{1/2} \cdot 1с = 1м$$

Найденная единица является единицей длины.

Произведем вычисления:

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10} м = 1{,}24 \cdot 10^{-10} м = 124нм$$

Пример 4. Волновая функция $\psi(x) = \sqrt{2/l}\sin\frac{\pi}{l}x$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике шириной *l*. Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале Δl =0,01*l* в двух случаях: 1) (вблизи стенки) ($0 \le x \le \Delta l$);

2) в средней части ящика $(\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2} \le x \le \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2})$.

Решение. Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале *dx (от x* до *x + dx),* пропорциональна этому интервалу и квадрату модуля волновой функции, описывающей данное состояние, равна

$$d\omega = |\psi(x)|^2 dx$$

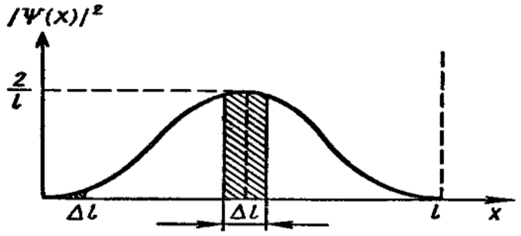

Рис. 64

В первом случае искомая вероятность найдется интегрированием в пределах от 0 до 0,01*l* (рис. 64):

$$\omega = \frac{2}{l}\int_{0}^{0,01l} \sin^2\frac{\pi}{l}xdx\ .$$

Знак модуля опущен, так как ψ — функция в данном случае не является комплексной.

Так как x изменяется в интервале $0 \le x \le 00,1l$ и, следовательно, $\pi x/l<<1$ справедливо приближенное равенство

$$\sin^2\frac{\pi}{l}x \approx (\frac{\pi}{l}x)^2\ .$$

С учетом этого выражения (1) примет вид

$$\omega = \frac{2}{l}\int_{0}^{0,01l}(\frac{\pi}{l}x)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3}\int_{0}^{0,01l} x^2 dx\ .$$

После интегрирования получим

$$\omega = \frac{2}{3}\pi^2\cdot 10^{-6} = 6,6\cdot 10^{-6}\ .$$

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи ее максимума в заданном малом интервале (Δl=0,01l) практически не изменяется. Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$\omega = \left|\psi(l/2)\right|^2 \Delta l\ ,$$

или

$$\omega = \frac{2}{l}(\sin\frac{\pi}{l}\frac{l}{2})^2\Delta l = \frac{2}{l}\cdot 0,01l = 0,02$$

Пример 5. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра ${}_{3}^{7}Li$

Решение. Масса ядра всегда меньше суммы масс свободных (находящихся вне ядра) протонов и нейтронов, из которых ядро образовалось. Дефект массы ядра Δm и есть разность между суммой масс свободных нуклонов (протонов и нейтронов) и массой ядра, т. е.

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_я\ , \qquad (1)$$

где Z — атомный номер (число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов, составляющих ядро);

m_p, m_n, $m_я$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра.

В справочных таблицах всегда даются массы нейтральных атомов, но не ядер, поэтому формулу (1) целесообразно преобразовать так, чтобы в нее входила масса $m_я$ нейтрального атома. Можно считать, что масса нейтрального атома равна сумме масс ядра и электронов, составляющих электронную оболочку атома: $m_a=m_я+Zm_e$, откуда

$$m_я = m_a - Zm_e \qquad (2)$$

Выразив в равенстве (1) массу ядра по формуле (2), получаем

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_a + Zm_e \text{ ,или}$$

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A-Z)m_n - m_a$$

Замечая, что $m_p+m_e=m_H$, где m_H—масса атома водорода, окончательно находим

$$\Delta m = Zm_H + (A-Z)m_n - m_a . \qquad (3)$$

Подставив в выражение (3) числовые значения масс , получим

$$\Delta m = [3\cdot 1{,}00783 + (7-3)\cdot 1{,}00867 - 7\cdot 0{,}1601]\,а.е.м = $$
$$= 0{,}04216\,а.е.м.$$

В соответствии с законом пропорциональности массы и энергии

$$E = c^2 \Delta m , \qquad (4)$$

где c — скорость света в вакууме.

Коэффициент пропорциональности c^2 может быть выражен двояко:

$$c^2 = 9\cdot 10^{16} м^2/c^2, \text{ или } c^2 = \Delta E/\Delta m = 9\cdot 10^{16} Дж/кг$$

Если вычислить энергию связи, пользуясь внесистемными единицами, то c^2 =931 МэВ/а.е.м. С учетом этого формула (4) примет вид

$$E = 931\Delta m \text{ (МэВ)}. \qquad (5)$$

Подставив найденное значение дефекта массы ядра в формулу (5), получим

$$E = 931\cdot 0{,}04216 \text{ МэВ} = 39{,}2 \text{ МэВ}.$$

Примечание. Термин «дефект массы» часто применяют в другом смысле: дефектом массы Δ называют разность между массой нейтрального атома данного изотопа и его массовым числом A: $\Delta=m_a-A$. Эта величина особого физического смысла не имеет, но ее использование позволяет в ряде случаев значительно упростить вычисления. В настоящем пособии всюду имеется в виду дефект массы Δm, определяемый формулой (1).

Пример 6. При соударении α-частицы с ядром бора ${}^{10}_{5}B$ произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одним из этих ядер было ядро атома водорода ${}^{1}_{1}H$. Определить порядковый номер и массовое число второго ядра, дать символическую запись ядерной реакций и определить ее энергетический эффект.

Решение. Обозначим неизвестное ядро символом ${}_Z^AX$. Так как α-частица представляет собой ядро гелия ${}_2^4He$, запись реакции имеет вид

$$ {}_2^4He + {}_5^{10}B \rightarrow {}_1^1H + {}_Z^AX \ . $$

Применив закон сохранения числа нуклонов, получим уравнение 4+10 = 1+A. откуда A = 13. Применив закон сохранения заряда, получим уравнение 2+5 = 1+Z, откуда Z=6. Следовательно, неизвестное ядро является ядром атома изотопа углерода ${}_6^{13}C$.

Теперь можем записать реакцию в окончательном виде:

$$ {}_2^4He + {}_5^{10}B \rightarrow {}_1^1H + {}_6^{13}C \ . $$

Энергетический эффект Q ядерной реакции определяется по формуле

$$ Q = 931\left[\left(m_{He} + m_B\right) - \left(m_H - m_c\right)\right]. $$

Здесь в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых скобках — массы ядер — продуктов реакции. При числовых подсчетах по этой формуле массы ядер заменяют массами нейтральных атомов. Возможность такой замены вытекает из следующих соображений.

Число электронов в электронной оболочке нейтрального атома равно его зарядовому числу Z. Сумма зарядовых чисел исходных ядер равна сумме зарядовых чисел ядер — продуктов реакции. Следовательно, электронные оболочки ядер гелия и бора содержат вместе столько же электронов, сколько их содержат электронные оболочки ядер углерода и водорода.

Очевидно, что при вычитании суммы масс нейтральных атомов углерода и водорода из суммы масс атомов гелия и бора массы электронов выпадут и мы получим тот же результат, как если бы брали массы ядер. Подставив массы атомов в расчетную формулу, получим

Q=931(4,00260+10,01294)-(1,00783+13,00335)МэВ = 4,06 МэВ.

Пример 7. Определить начальную активность A_0 радиоактивного препарата магния ${}^{27}Mg$ массой m = 0,2 мкг, а также его активность A через время t = 6 ч. Период полураспада $T_{1/2}$ магния считать известным.

Решение. Активность A изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа dN ядер, распавшихся за интервал времени dt, к этому интервалу:

$$A = -dN/dt. \qquad (1)$$

Знак «—» показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Для того чтобы найти dN/dt, воспользуемся законом радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (2)$$

где N — число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, в момент времени t; N_0 — число радиоактивных ядер в момент времени, принятый за начальный ($t = 0$);

λ — постоянная радиоактивного распада.

Продифференцируем выражение (2) по времени:

$$dN/dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

Исключив из формул (1) и (3) dN/dt, находим активность препарата в момент времени t:

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (4)$$

Начальную активность A_0 препарата получим при $t=0$:

$$A_0 = \lambda N_0 \qquad (5)$$

Постоянная радиоактивного распада λ связана с периодом полураспада $T_{1/2}$ соотношением

$$\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}. \qquad (6)$$

Число N_0 радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν данного изотопа:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \qquad (7)$$

где m — масса изотопа; M — молярная масса.

С учетом выражений (6) и (7) формулы (5) и (4) принимают вид

$$A_0 = \frac{m}{M}\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A; \qquad (8) \qquad\qquad A = \frac{m}{M}\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}. \qquad (9)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $T_{1/2}$ = 10 мин = 600 с $ln2$ = 0,693, t = 6 ч = $6 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3$ с = $2{,}16 \cdot 10^4$ с:

$$A_o = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0{,}693}{600} 6{,}02 \cdot 10^{23} Бк = 5{,}13 \cdot 10^{12} Бк = 5{,}13 ТБк;$$

$$A = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0{,}693}{600} 6{,}02 \cdot 10^{23} e^{-\frac{0{,}693}{600} \cdot 2{,}16 \cdot 10^4} Бк = 81{,}3 Бк.$$

Пример 8. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить удельную теплоемкость c при постоянном объеме алюминия при температуре T=200К. Характеристическую температуру Θ_E Эйнштейна принять для алюминия равной 300 К.

Решение. Удельная теплоемкость c вещества может быть выражена через молярную теплоемкость C_m соотношение

$$c = C_m / M, \qquad (1)$$

где M — молярная масса.

Молярная теплоемкость при постоянном объеме по теории Эйнштейна выражается формулой

$$C_m = 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e\Theta_{E/T}}{(e^{\Theta_{E/T}} - 1)^2} \qquad (2)$$

Подставив в (1) выражение теплоемкости C_m по формуле (2), получим

$$c = \frac{3R}{M}\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e\Theta_{E/T}}{\left(e^{\Theta_{E/T}} - 1\right)^2} \qquad (3)$$

Произведем вычисления:

$$c = \frac{3 \cdot 8{,}31}{27 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{300}{200}\right)^2 \frac{e^{300/200}}{\left(e^{300/200} - 1\right)^2} Дж/(кг \cdot К) = 770 Дж/(кг \cdot К).$$

Пример 9. Определить теплоту ΔQ, необходимую для нагревания кристалла $NaCI$ массой m = 20 г от температуры T_1 = 2К до температуры T_2=4 К. Характеристическую температуру Дебая Θ_D для NaCI принять равной 320 К и условие $T << \Theta_D$ считать выполненным.

Решение. Теплота ΔQ, подводимая для нагревания тела от температуры T_1 до T_2, может быть вычислена по формуле

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C_T dT , \qquad (1)$$

где C_T — теплоемкость тела.

Теплоемкость тела связана с молярной теплоемкостью соотношением

$$C_T = mC_m / M , \qquad (2)$$

где m — масса тела; M — молярная масса.

Подставив выражение C_T в формулу (1), получим

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT . \qquad (3)$$

В общем случае теплоемкость C_T есть сложная функция температуры, поэтому выносить ее за знак интеграла нельзя. Однако если выполнено условие $T << \Theta_D$, то нахождение ΔQ облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая, в согласии с которым теплоемкость пропорциональна кубу термодинамической температуры:

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 . \qquad (4)$$

Подставляя молярную теплоемкость (4) в формулу (3), получим

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT .$$

Выполним интегрирование:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left(\frac{T_2^4}{4} - \frac{T_1^4}{4} \right).$$

Переписав полученную формулу в виде

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left(T_2^4 - T_1^4 \right),$$

произведем вычисления:

$$\Delta Q = \frac{3 \cdot (3{,}14)^4}{5} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{58{,}5 \cdot 10^{-3}} \frac{8{,}31}{(320)^2} \left(4^4 - 2^4\right) Дж = 1{,}22 \cdot 10^{-3}\, Дж = $$

$$= 1{,}22\, мДж .$$

Пример 10. Вычислить максимальную энергию ε_F (энергию Ферми), которую могут иметь свободные электроны в металле (медь) при температуре T = 0 К. Принять, что на каждый атом меди приходится по одному валентному электрону.

Решение. Максимальная энергия εр, которую могут иметь электроны в металле при T=0К, связана с концентрацией свободных электронов соотношением

$$\varepsilon_F = \hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} / (2m), \qquad (1)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка; m — масса электрона.

Концентрация свободных электронов по условию задачи равна концентрации атомов, которая может быть найдена по формуле

$$n = \rho \cdot N_A / M, \qquad (2)$$

где ρ — плотность меди; N_A — постоянная Авогадро; M — молярная масса.

Подставляя выражение n в формулу (1), получаем

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \rho \frac{N_A}{M}\right)^{2/3}.$$

Произведем вычисления:

$$\varepsilon_F = \frac{\left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\right)^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}\left[3 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}}\right]^{2/3} Дж =$$

$$= 1{,}18 \cdot 10^{-18} Дж = 7{,}4 эВ.$$

Пример 11. Кремниевый образец нагревают от температуры t_1 = 0°С до температуры t_2 = 10°С. Во сколько раз возрастает его удельная проводимость?

Решение. Удельная проводимость γ собственных полупроводников связана с температурой T соотношением

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)}.$$

где γ_0 — константа; ΔE — ширина запрещенной зоны. Следовательно,

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{e^{-\Delta E/(2kT)}}{e^{-\Delta E/(2kT)}} = \exp\left[\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Полагая для кремния ΔE = 1,1эВ, произведем вычисления:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \exp \frac{1{,}76 \cdot 10^{-19}}{2(1{,}38 \cdot 10^{-23})}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{283}\right) = 2{,}28$$