Примеры решения задач по молекулярной физике и термодинамике

Пример 1. В баллоне объемом $V = 10 \cdot 10^{-3}$ м^3 находился гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К. После того как из баллона был израсходован гелий массой $m = 0{,}01$ кг, давление в баллоне понизилось до $p_2 = 0{,}364$ МПа. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ поступательного движения молекулы гелия оставшейся в баллоне.

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы определяется формулой:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k - постоянная Больцмана.

Для нахождения температуры воспользуемся уравнением состояния идеального газа для начального и конечного состояния газа:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1, \qquad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT_2,$$

где m_1 и m_2 - масса гелия в начальном и конечном состоянии.

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}, \qquad m_2 = \frac{\mu p_2 V}{RT_2}.$$

Масса израсходованного гелия:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right).$$

Из последнего уравнения найдем температуру T_2:

$$T_2 = \frac{\mu p_2 V T_1}{\mu p_1 V - mRT_1}$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}k\,\frac{\mu p_2 V T_1}{\mu p_1 V - mRT_1}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\frac{3}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 10^{6}}{\frac{1\cdot 10^{6}}{300} - \frac{1\cdot 10^{-2}\cdot 8{,}31}{4\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 10^{-3}}} = 6{,}13\cdot 10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Пример 2. Барометр в кабинете летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 79$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с $T = 278$ К до $T = 274$ К. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление p_0 у поверхности Земли считать нормальным.

Решение. Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой: $p = p_0\cdot e^{-\frac{\mu\cdot g\cdot h}{RT}}$. Барометр может показывать неизменное давление при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находился не на высоте h_1 (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

$$p_1 = p_0\cdot e^{-\frac{\mu\cdot g\cdot h_1}{RT_1}},\quad p_2 = p_0\cdot e^{-\frac{\mu\cdot g\cdot h_2}{RT_2}},\quad p_1 = p_2 = p.$$

Найдем отношение $\frac{p_0}{p}$ и обе части полученного равенства прологарифмируем:

$$ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu\cdot g\cdot h_1}{RT_1};\quad ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu\cdot g\cdot h_2}{RT_2}.$$

Из полученных соотношений выразим высоты h_1 и h_2, и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R}{\mu \cdot g} ln\left(\frac{p_0}{p}\right)(T_2 - T_1).$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\Delta h = \frac{8{,}31 \cdot ln\left(\frac{101}{79}\right)}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}(1-5) = -28{,}5 \text{ м}.$$

Самолет находился ниже на 28,5 м по сравнению с начальной высотой h_1.

Пример 3. Средняя длина свободного пробега молекулы углекислого газа при нормальных условиях $\langle l \rangle = 40$ нм. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle \mathrm{v} \rangle$ молекул и число соударений $\langle Z \rangle$, которое испытывает молекула за 1 с.

<u>Решение.</u> Средняя арифметическая скорость молекулы определяется по формуле:

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot \mu}}.$$

Подставляя численное значение, получим:

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}3 \cdot 293}{3{,}14 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}} = 362 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Среднее число соударений в 1 с:

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle \mathrm{v} \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{362}{40 \cdot 10^{-9}} = 9{,}05 \cdot 10^{9} \text{ с}^{-1}.$$

Пример 4. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q, переданную газу.

Решение. Построим график процесса (рис. 2.4). На графике точками 1, 2, 3 обозначим состояние газа, характеризуемое параметрами (p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).

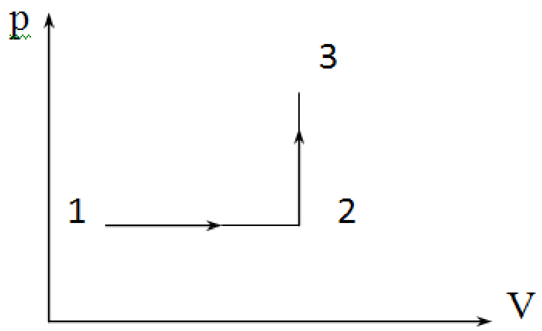

Рис. 2.4.

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = C_V m \Delta T_1 = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}\Delta T_1,$$

где i - число степеней свободы молекул газа (для кислорода $i = 5$);

$\Delta T_1 = T_3 - T_1$ - разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой:

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \qquad pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1, \qquad pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2,$$

$$A_{12} = \frac{m}{\mu}R\Delta T_2,$$

где $\Delta T_2 = T_2 - T_1$ - разность температур при постоянном давлении.

Воспользовавшись уравнением Менделеева-Клапейрона, определяем температуру:

$$T = \frac{pV\mu}{mR}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме равна нулю

$A_{2-3} = 0$.

Полная работа, совершаемая газом

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} = A_{1-2},$$

тогда согласно первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 2887 \text{ К};$$

$$A = A_{1-2} = \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0{,}40 \text{ МДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (2887 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 3{,}24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3{,}24 \text{ МДж};$$

$$Q = (3{,}24 + 0{,}4) \cdot 10^6 = 3{,}64 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3{,}64 \text{ МДж}.$$

Пример 5. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси неона и водорода, если масса неона $m_1 = 11 \cdot 10^{-3}$ кг и водорода $m_2 = 21 \cdot 10^{-3}$ кг.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов находятся по формулам:

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} \quad \text{и} \quad c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu},$$

где i - число степеней свободы молекул газа;

μ - молярная масса.

Для неона $i = 3$ - одноатомный газ, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Для водорода $i = 5$ - двухатомный газ, $\mu = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

$$c_V^{неона} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 6{,}24 \cdot 10^2\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_p^{неона} = \frac{3+2}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 1{,}04 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_V^{водорода} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}04 \cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_p^{водорода} = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}46 \cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для нахождения удельной теплоемкости c_V смеси при постоянном объеме теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT, выразим $Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T$ и с другой стороны $Q = \left(c_V^{неона} m_1 + c_V^{водорода} m_2\right)\Delta T$.

$$c_V(m_1 + m_2)\Delta T = \left(c_V^{неона} m_1 + c_V^{водорода} m_2\right)\Delta T$$

$$c_V(m_1 + m_2) = c_V^{неона} m_1 + c_V^{водорода} m_2$$

$$c_V = c_V^{неона} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_V^{водорода} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \omega_1$ - массовая доля неона,

$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \omega_2$ - массовая доля водорода.

$$c_V = 6{,}24 \cdot 10^2 \frac{11 \cdot 10^{-3}}{(11 + 21) \cdot 10^{-3}} + 1{,}04 \cdot 10^4 \frac{21 \cdot 10^{-3}}{(11 + 21) \cdot 10^{-3}} = 7{,}025 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Аналогично

$$c_p = c_p^{неона} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_p^{водорода} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1{,}04 \cdot 10^3 \frac{11 \cdot 10^{-3}}{(11 + 21) \cdot 10^{-3}} +$$

$$+ 1{,}46 \cdot 10^4 \frac{21 \cdot 10^{-3}}{(11 + 21) \cdot 10^{-3}} = 9{,}94 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Пример 6. Тепловая машина работает по обратному циклу Карно. Температура теплоотдатчика $T_1 = 500$ К. Определить термический КПД η и температуру T_2 теплоприемника тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от теплоотдатчика, машина совершает работу $A = 350$ Дж.

Решение. Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от теплоотдатчика, превращается в механическую работу

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 - теплота полученная от теплоотдатчика;

A - работа совершенная рабочим телом тепловой машины.

$$\eta = \frac{350}{1000} = 0{,}35.$$

КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Следовательно

$$T_2 = T_1(1 - \eta).$$

Произведем вычисление

$$T_2 = 500(1 - 0{,}35) = 325 \text{ К}.$$

Пример 7. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды от температуры $T_1 = 273$ К до температуры $T_2 = 373$ К.

Решение. Изменение энтропии выражается общей формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

При бесконечно малом изменении dT температуры нагреваемого тела количество теплоты

$$\delta Q = mcdT,$$

где m - масса тела;

c - его удельная теплоемкость.

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}.$$

$$\Delta S = mc\, ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\Delta S = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot ln \frac{373}{273} = 132\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$