ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

по дисциплине: **«Исследование операций»**

по теме: **«Симплекс-метод решения задач ЗЛП»**

Выполнил:

Проверил:

Цель работы: Получить практические навыки решения задач линейного программирования (ЗЛП) симплекс-методом.

Задание: ЗЛП о раскрое материала (кол-во вариантов раскроя / кол-во видов заготовок) 6/2

На раскрой поступает материал одного образца. Из него необходимо вырезать заготовки 2 видов. Дано 6 вариантов раскроя. По каждому варианту даны: количество заготовок двух видов, полученных из одной единицы материала, и количество отходов, полученных из единицы материала. По условию есть ограничение:
z1 не менее 100;
z2 не менее 30;
Необходимо обеспечить такой план выпуска, чтобы отходы по каждому варианту были минимальные.

Площадь отходов:
$S_1 = 144 – 8 * 9 – 6 * 2 = 60(м^2)$
$S_2 = 144 – 9 * 9 – 1 * 2 = 49 (м^2)$
$S_3 = 144 - 10 * 9 - 4 * 2 = 46 (м^2)$
$S_4 = 144 – 8 * 9 – 8 * 2 = 56(м^2)$
$S_5 = 144 – 7 * 9 – 10 * 2 = 56 (м^2)$
$S_6 = 144 - 11* 9 - 9 * 2 = 27 (м^2)$

Модель двойственной задачи:

Раскрой / Заготовки	1	2	3	4	5	6	Ограничение, b
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z1	8	9	10	8	7	11	100
z2	6	1	4	8	10	9	30
Отходы	60	49	46	56	56	27	

Решение двойственной задачи графическим методом:

Задача в канонической форме

$60\cdot x1 + 49\cdot x2 + 46\cdot x3 + 56\cdot x4 + 56\cdot x5 + 27\cdot x6 \quad \min$

$8\cdot x1 + 9\cdot x2 + 10\cdot x3 + 8\cdot x4 + 7\cdot x5 + 11\cdot x6 = 100$

$6\cdot x1 + 1\cdot x2 + 4\cdot x3 + 8\cdot x4 + 10\cdot x5 + 9\cdot x6 = 30$

Двойственная задача

$100\cdot y1 + 30\cdot y2 \quad \max$

$8\cdot y1 + 6\cdot y2 \le 60$
$9\cdot y1 + 1\cdot y2 \le 49$
$10\cdot y1 + 4\cdot y2 \le 46$
$8\cdot y1 + 8\cdot y2 \le 56$
$7\cdot y1 + 10y2 \le 56$
$11y1 + 9\cdot y2 \le 27$

Решение задачи

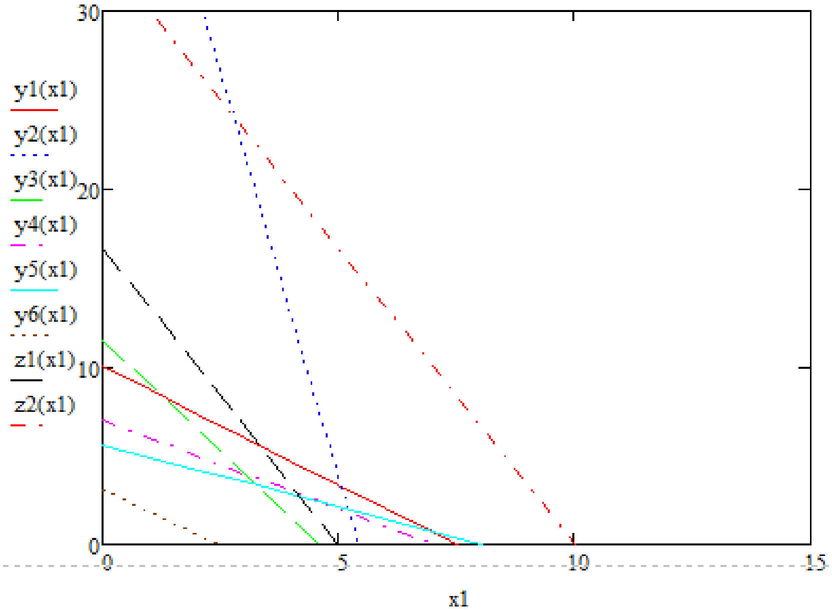
$F(x1,x2) := 100\cdot x1 + 30\cdot x2$

$y1(x1) := \frac{(60 - 8\cdot x1)}{6} \qquad y4(x1) := \frac{(56 - 8\cdot x1)}{8} \qquad z1(x1) := \left(\frac{1}{30}\right)\cdot(500 - 100\cdot x1)$

$y2(x1) := \frac{(49 - 9\cdot x1)}{1} \qquad y5(x1) := \frac{(56 - 7\cdot x1)}{10} \qquad z2(x1) := \left(\frac{1}{30}\right)\cdot(1000 - 100\cdot x1)$

$y3(x1) := \frac{(46 - 10\cdot x1)}{4} \qquad y6(x1) := \frac{(27 - 11\cdot x1)}{9}$

$x1 := 0..100$



$x1 := 0$

Given

$y6(x1) = 0$

$\mathrm{Find}(x1) = 2.455$

$y6(2.455) = -5.556 \times 10^{-4}$

$F(2.455, y6(2.455)) = 245.483$

Результат из лабораторной работы №1:

$f\left(0, -1.776 \times 10^{-15}, 0, 0, 0, 9.091\right) = 245.457$

Задача о добыче и производстве балласта:

Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. м^3 балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице Б.2. Потребность в балласте песчано-гравийном не превышает p_1 тыс. м^3, в балласте щебеночном – p_2 тыс. м^3. Определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль. Исходные данные и варианты заданий приведены в таблицах Б.2–Б.4.

Таблица Б.2 – **Исходные данные задачи**

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3 балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
Бульдозеры, маш.-ч	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
Трудовые ресурсы, чел.-ч	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Прибыль, тыс. ден. ед.	c_1	c_2	c_3	

Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3								
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{31}
21	40	27	6	3	7	90	65	55

Объем ресурсов			Прибыль		
b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
340	70	800	5	8	9

Решение задачи симплекс методом:

Определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 5x_1+8x_2+9x_3$ при следующих условиях-ограничений.

$21x_1+40x_2+27x_3\leq340$

$6x_1+3x_2+7x_3\leq70$

$90x_1+65x_2+55x_3\leq800$

$21x_1 + 40x_2 + 27x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 340$

$6x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 70$

$90x_1 + 65x_2 + 55x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 800$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

21	40	27	1	0	0
6	3	7	0	1	0
90	65	55	0	0	1

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_4, x_5, x_6.

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: X1 = (0,0,0,340,70,800)

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	340	21	40	27	1	0	0
x_5	70	6	3	7	0	1	0
x_6	800	90	65	55	0	0	1
F(X0)	0	-5	-8	-9	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №1.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_3, так как это наибольший коэффициент по модулю. Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i3}

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (7) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_4	340	21	40	27	1	0	0	12.59
x_5	70	6	3	**7**	0	1	0	**10**
x_6	800	90	65	55	0	0	1	14.55
F(X1)	0	-5	-8	**-9**	0	0	0	0

После преобразований получаем новую таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	70	-2.14	28.43	0	1	-3.86	0
x_3	10	0.86	0.43	1	0	0.14	0
x_6	250	42.86	41.43	0	0	-7.86	1
F(X1)	90	2.71	-4.14	0	0	1.29	0

Итерация №2.

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2} и из них выберем наименьшее:
Следовательно, 1-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (28.43) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_4	70	-2.14	**28.43**	0	1	-3.86	0	**2.46**
x_3	10	0.86	0.43	1	0	0.14	0	23.33
x_6	250	42.86	41.43	0	0	-7.86	1	6.03
F(X2)	90	2.71	**-4.14**	0	0	1.29	0	0

После преобразований получаем новую таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2.46	-0.0754	1	0	0.0352	-0.14	0
x_3	8.94	0.89	0	1	-0.0151	0.2	0
x_6	147.99	45.98	0	0	-1.46	-2.24	1
F(X2)	100.2	2.4	0	0	0.15	0.72	0

Конец итераций: индексная строка не содержит отрицательных элементов - найден оптимальный план
Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2.46	-0.0754	1	0	0.0352	-0.14	0
x_3	8.94	0.89	0	1	-0.0151	0.2	0
x_6	147.99	45.98	0	0	-1.46	-2.24	1
F(X3)	100.2	2.4	0	0	0.15	0.72	0

Оптимальный план можно записать так:
$x_2 = 2.46$
$x_3 = 8.94$
F(X) = 8*2.46 + 9*8.94 = 100.2

Проверка решения в MathCad:

$$f(x1, x2, x3) := \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

Определяем целевую функцию через скалярное произведение двух векторов (суммарная прибыль)

$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1$

Задаем начальные приближения - "наугад", но с учетом ограничений задачи (эти начальные приближения удовлетворяют всем ограничениям)

Given

Начало блока решения Mathcad

$21 \cdot x1 + 40 \cdot x2 + 27 \cdot x3 \le 340$

$6 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + 7 \cdot x3 \le 70$

Ограничения задачи

$90 \cdot x1 + 65 \cdot x2 + 55 \cdot x3 \le 800$

$x2 \le 8 \quad x3 \le 9$

$x1 \ge 0 \quad x2 \ge 0 \quad x3 \ge 0$

Физические ограничения

$$\mathrm{Maximize}(f, x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.462 \\ 8.945 \end{pmatrix}$$

Полученное решение
(конец блока решения Mathcad)

Аргументами функции Minimize являются:
первый аргумент - имя оптимизируемой функции (f);
остальные аргументы (x1, x2, x3) - соответствуют аргументам оптимизируемой функции

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 2.462 \\ 8.945 \end{pmatrix}$$

Задаем вектор решений

ORIGIN = 0

$X_0 = 0$ x1
$X_1 = 2.462$ x2
$X_2 = 8.945$ x3

$f(X_0, X_1, X_2) = 100.201$

Находим максимальную прибыль

$X_1 = 2.462$ **<= 8**

$X_2 = 8.945$ **<= 9**

Убеждаемся, что ограничения задачи выполняются

$14 \cdot X_0 + 18 \cdot X_1 + 23 \cdot X_2 = 250.051$ **<= 350**

$TOL = 1 \times 10^{-3}$

$8 \cdot X_0 + 5 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 = 65.98$ **<= 70**

$32 \cdot X_0 + 45 \cdot X_1 + 54 \cdot X_2 = 593.82$ **<= 800**

Проверка решения в Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Данные						
2	Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 м^3 балласта			Факт	План	
3		песчаного	песчано-гравийного	щебеночного			
4	Экскаваторы	21	40	27	340	340	
5	Будьдозеры	6	3	7	70	70	
6	Трудовые ресурсы	90	65	55	652,01005	800	
7	Прибыль	5	8	9	100,20101		
8	Количество грунта	0	2,46231156	8,944723618			

Формулы:

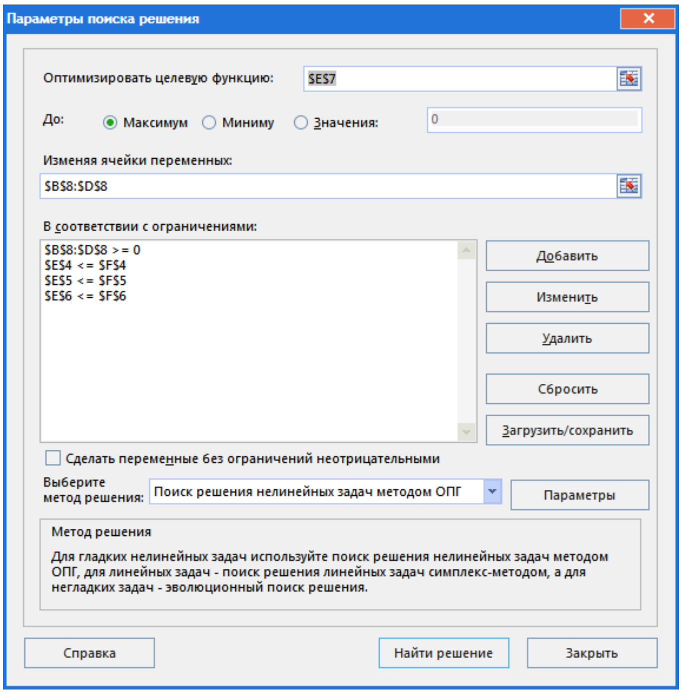
E4 =B8*B4+C8*C4+D8*D4

E5 =B8*B5+C8*C5+D8*D5

E6 =B8*B6+C8*C6+D8*D6

E7 =B7*B8+C7*C8+D7*D8

Поиск решения:



Выводы:

Получила практические навыки построения математических моделей прямых и двойственных задач математического программирования, и решения простых задач линейного программирования (ЗЛП) симплекс-методом. Разобралась с составлением двойственной задачи.