

## **ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 2**

**по дисциплине: «Исследование операций»**

**по теме: « Решение задач линейного программирования  
средствами пакета Mathcad»**

Выполнил:

Принял:

Дата сдачи отчета: \_\_\_\_\_

Дата допуска к защите: \_\_\_\_\_

Дата защиты: \_\_\_\_\_

## Лабораторная работа 2

### Решение задач линейного программирования средствами пакета Mathcad

**Цель работы:** Получить практические навыки решения задач линейного программирования (ЗЛП) средствами пакета Mathcad

#### **Теоретические сведения**

См. презентации лекций:

«Постановка задач исследования операций, основы математического программирования и методов оптимизации»;

«Решение задач оптимизации и исследования операций в пакете Mathcad».

#### **Задание:**

**1.** Решить с помощью блока решения пакета Mathcad (конструкций Given – Minimize, Given – Maximize) задачи (по своему варианту):

а) о раскрое материала;

Раскрой Заготовки	1	2	3	4	5	6	Ограничение, b
	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	
z1 <sub>круги</sub>	8	9	10	8	7	11	100
z2 <sub>треугольник</sub>	6	1	4	8	10	9	30
ОТХОДЫ	60	49	46	56	56	27	

**Целевая функция примет следующий вид:**

$$F=60*x_1+49x_2+46x_3+56*x_4+56x_5+27x_6 \rightarrow \min$$

**Система линейных уравнений:**

$$\begin{cases} 8*x_1+9*x_2+10*x_3+8*x_4+7*x_5+11*x_6 \geq 100 \\ 6*x_1+x_2+4*x_3+8*x_4+10*x_5+9*x_6 \geq 30 \end{cases}$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 & 8 & 7 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} 60 \\ 49 \\ 46 \\ 56 \\ 56 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\underline{P} := \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{pmatrix}$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1 \quad x4 := 1 \quad x5 := 1 \quad x6 := 1$$

Given

$$\underline{A} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{pmatrix} \geq \underline{P}$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \quad x3 \geq 0 \quad x4 \geq 0 \quad x5 \geq 0 \quad x6 \geq 0$$

$$\text{Find}(x1, x2, x3, x4, x5, x6) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5.273 \end{pmatrix}$$

$$f(x1, x2, x3, x4, x5, x6) := \underline{C} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x1} := 1 \quad \underline{x2} := 1 \quad \underline{x3} := 1 \quad \underline{x4} := 1 \quad \underline{x5} := 1 \quad \underline{x6} := 1$$

$$\text{Maximize}(f, x1, x2, x3, x4, x5, x6) = \begin{pmatrix} 3.696 \\ 7.826 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

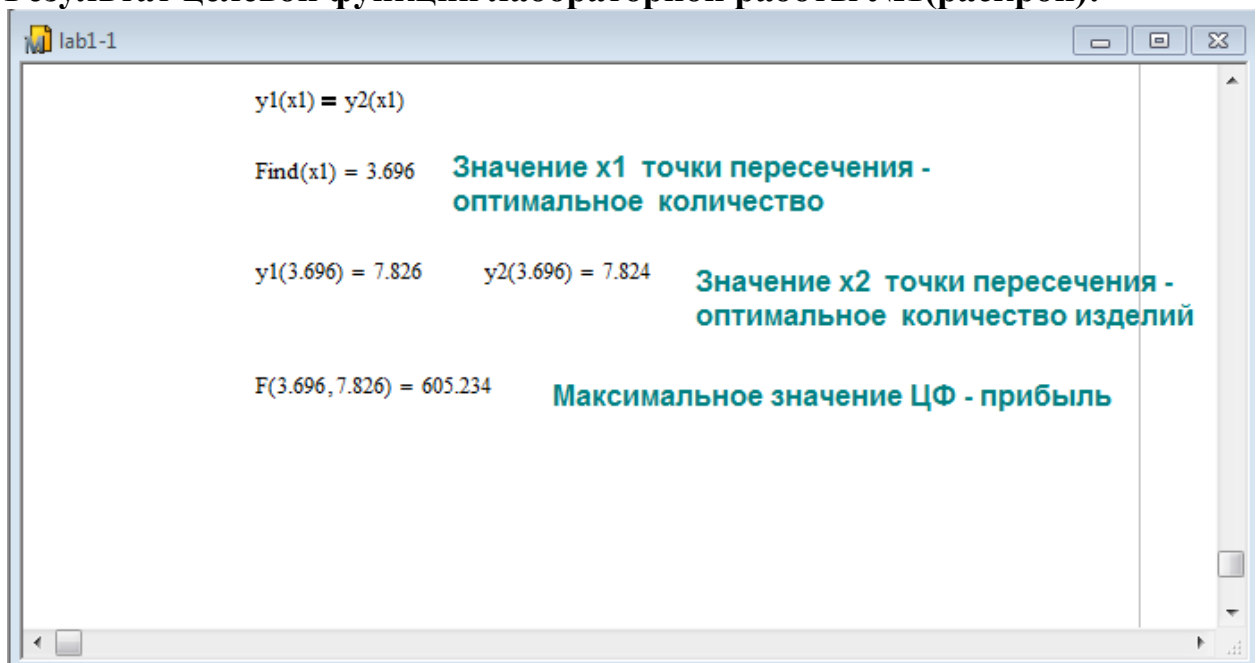
$$f(3.696, 7.826, 0, 0, 0, 0) = 605.234$$

$$X := \begin{pmatrix} 3.696 \\ 7.826 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad +$$

$$(A^T)^{(0)} \cdot X = 100.002$$

$$(A^T)^{(1)} \cdot X = 30.002$$

### Результат целевой функции лабораторной работы №1(раскрой):



б) о составлении оптимальной смеси;

**Таблица данных:**

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/ингредиента)			Стоимость (руб./кг)
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38	0	0	0,4
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,40

Окончательный вид математической формулировки задачи:

$$0.04X_1 + 0.15X_2 + 0.40X_3 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10\,000$$

$$0.38X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 \geq 80$$

$$0.09X_2 + 0.50X_3 \geq 2200$$

$$0.02X_2 + 0.08X_3 \leq 500$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

**Минимизация суммарной стоимости смеси**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 7 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Матрица (состава) смеси:**

строки - элементы (в смеси 2 элемента);

столбцы - ингредиенты (в смеси 6 ингредиента).

$$C := \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

**Вектор стоимостей ингредиентов** - показывает, сколько стоит одна единица измерения каждого из ингредиентов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Вектор решений

$$P := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

**Вектор плана** - учитывает требования по суммарному содержанию в смеси элементов A, B, C

$x1 := 1$        $x2 := 1$       Произвольные начальные приближения

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \geq P$$

Выполнение требований плана

$x1 \geq 0$        $x2 \geq 0$       Физические ограничения

$$\text{Find}(x1, x2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Нахождение начальной точки для оптимизации  
(конец блока решения Mathcad)

В блоке решения пока нет целевой функции. После нахождения начальной точки для оптимизации, находим решение, вводя целевую функцию

$$f(x1, x2) := C \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x1} := 1 \quad \underline{x2} := 3$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \geq P$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$$

$$\text{Minimize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(1, 3) = 370$$

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[ (A^T)^{(0)} \right] \cdot X = 11$$

$$\left[ (A^T)^{(1)} \right] \cdot X = 10$$

$$\left[ (A^T)^{(2)} \right] \cdot X = 16$$

$$\left[ (A^T)^{(3)} \right] \cdot X = 7$$

$$\left[ (A^T)^{(4)} \right] \cdot X = 15$$

$$\left[ (A^T)^{(5)} \right] \cdot X = 13$$

$$f(x_1, x_2) := C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := 2.859 \quad x_2 := 1.714$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq P$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{Maximize}(f, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.667 \end{pmatrix}$$

$$f(1, 1.667) = 250.03$$

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{(0)} \cdot X = 10.86$$

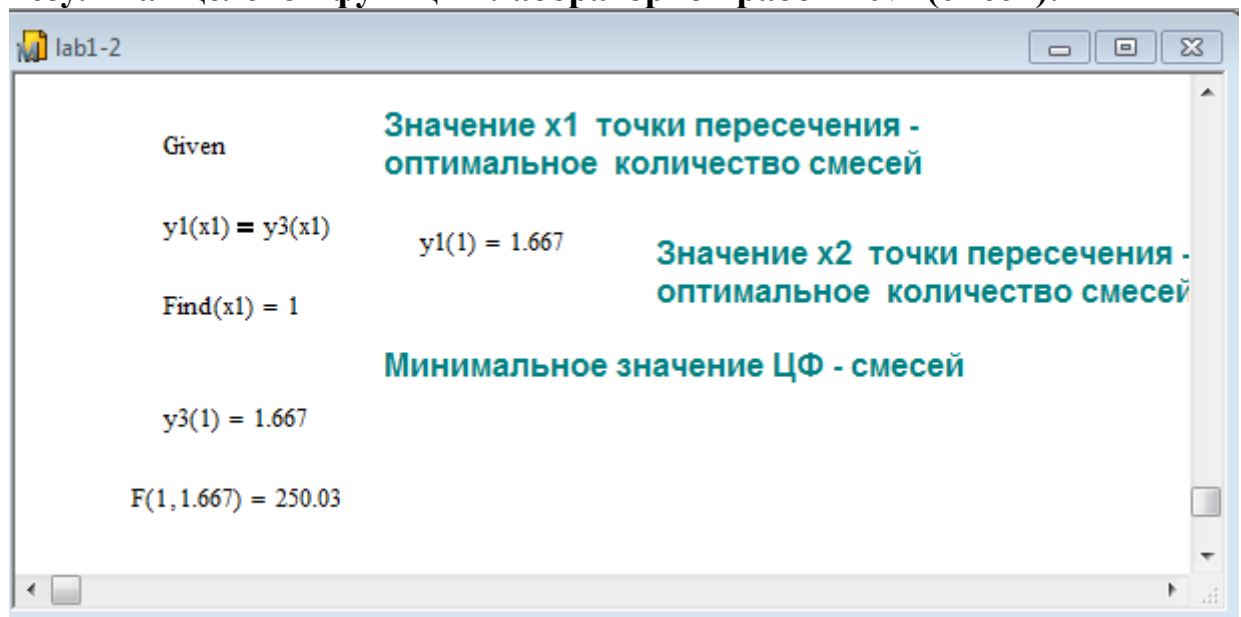
$$(A^T)^{(1)} \cdot X = 8.001$$

$$(A^T)^{(2)} \cdot X = 25.155$$

$$(A^T)^{(3)} \cdot X = 6.287$$

$$(A^T)^{(4)} \cdot X = 15.433$$

**Результат целевой функции лабораторной работы №1(смеси):**



## Минимизация отклонения состава смеси от требуемых показателей

### Исходные данные

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 7 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица (состава) смеси:

строки - элементы (в смеси 2 элемента);

столбцы - ингредиенты (в смеси 6 ингредиента).

$$C := \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Вектор стоимостей ингредиентов - показывает, сколько стоит одна единица измерения каждого из ингредиентов

$$P := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Вектор плана - учитывает требования по суммарному содержанию в смеси элементов A, B, C

### Решение

**Шаг 1.** Определение начальной точки, удовлетворяющей ограничениям, которая затем послужит начальным приближением для оптимизации

$x1 := 1$        $x2 := 1$       Произвольные начальные приближения

Given      Начало блока решения Mathcad

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \geq P$$

Выполнение требований плана

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$$

Физические ограничения

$$\text{Find}(x1, x2) = \blacksquare$$

Нахождение начальной точки для оптимизации  
(конец блока решения Mathcad)

В блоке решения пока нет целевой функции. После нахождения начальной точки для оптимизации, находим решение, вводя целевую функцию



## Шаг 2. Решение задачи оптимизации

$$g(x_1, x_2) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - P$$

Вспомогательная функция - задает вектор отклонений факта от плана по содержанию элементов в смеси

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{(g(x_1, x_2)_0)^2 + (g(x_1, x_2)_1)^2 + (g(x_1, x_2)_2)^2}$$

Целевая функция - модуль вектора отклонений факта от плана

Если записывать целевую функцию в виде

$$f(x_1, x_2) = |g(x_1, x_2)|$$

то Minimize не работает. Поэтому приходится явно расписать модуль вектора

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 3$$

Используем полученные после шага 1 начальные приближения

Given

Начало блока решения Mathcad

Выполнение требований плана уже учтено при задании целевой функции, которую будем минимизировать

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Физические ограничения

$$\text{Minimize}(f, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.774 \\ 2.14 \end{pmatrix}$$

Полученное решение  
(конец блока решения Mathcad)

Аргументами функции Minimize являются:

первый аргумент - имя оптимизируемой функции (f);

остальные аргументы (x1, x2) - соответствуют аргументам оптимизируемой функции

$$X := \begin{pmatrix} 0.774 \\ 2.14 \end{pmatrix}$$

Задаем вектор решений

ORIGIN = 0

$$X_0 = 0.774 \quad x_1$$

$$X_1 = 2.14 \quad x_2$$

$$f(X_0, X_1) = 1.27$$

Находим значение целевой функции - модуль вектора отклонений факта от плана по содержанию элементов в смеси

$$C \cdot X = 270$$

Находим стоимость смеси.

Убеждаемся, что заданные ограничения по содержанию в смеси элементов А, С выполняются (хотя для элемента В имеет место небольшое невыполнение требований плана).

$$\left[ (A^T)^{(0)} \right] \cdot X = 7.968$$

$$\left[ (A^T)^{(1)} \right] \cdot X = 7.194$$

$$\left[ (A^T)^{(2)} \right] \cdot X = 11.838$$

$$\left[ (A^T)^{(3)} \right] \cdot X = 5.054$$

$$\left[ (A^T)^{(4)} \right] \cdot X = 10.882$$

$$\left[ (A^T)^{(5)} \right] \cdot X = \blacksquare$$

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$TOL = 1 \times 10^{-3}$$

в) о планировании выпуска продукции.

Вид готовой продукции	Выход готовой продукции из 1 <i>m</i> картофеля, <i>m</i>		Потребности рынка сбыта, <i>m</i>
	Поставщик 1	Поставщик 2	
Дольки	0,2	0,3	1,8
Кубики	0,2	0,1	1,2
Хлопья	0,3	0,3	2,4
Относительная прибыль, ден.ед.	5,0	6,0	

$$A := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 1$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 1$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \leq P$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$$

$$\text{Find}(x1, x2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x1, x2) := C \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 1$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \leq P$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$$

$$\text{Maximize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(4.5, 3) = 40.5$$

### Результат целевой функции лабораторной работы №1(планирование):

Given

$$y1(x1) = y2(x1)$$

$$\text{Find}(x1) = 4.5$$

Значение  $x1$  точки пересечения

$$y1(4.5) = 3$$

$$y2(4.5) = 3$$

Значение  $x2$  точки пересечения

$$F(4.5, 3) = 40.5$$

Максимальное значение ЦФ - прибыль

+

**Вывод:** Получили практические навыки решения задач линейного программирования (ЗЛП) средствами пакета Mathcad. В результате выполнения лабораторных работ №1 и №2 результаты целевых функций совпали.