

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 2**

**по дисциплине: «Исследование операций»**

**по теме: « Решение задач линейного программирования  
средствами пакета Mathcad»**

Выполнил:  
Принял:

Дата сдачи отчета: \_\_\_\_\_

Дата допуска к защите: \_\_\_\_\_

Дата защиты: \_\_\_\_\_

**Лабораторная работа 2**  
**Решение задач линейного программирования средствами пакета**  
**Mathcad**

**Цель работы:** Получить практические навыки решения задач линейного программирования (ЗЛП) средствами пакета Mathcad

**Теоретические сведения**

См. презентации лекций:

«Постановка задач исследования операций, основы математического программирования и методов оптимизации»;  
«Решение задач оптимизации и исследования операций в пакете Mathcad».

**Задание:**

1. Решить с помощью блока решения пакета Mathcad (конструкций Given – Minimize, Given – Maximize) задачи (по своему варианту):  
а) о раскрое материала;

Раскрой Заготовки	1	2	3	4	5	6	Ограничение, b
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$z_1$ круги	8	9	10	8	7	11	100
$z_2$ треугольник	6	1	4	8	10	9	30
Отходы	60	49	46	56	56	27	

**Целевая функция примет следующий вид:**  
 $F=60x_1+49x_2+46x_3+56x_1+56x_2+27x_3 \rightarrow \min$

**Система линейных уравнений:**

$$\begin{cases} 8x_1+9x_2+10x_3+8x_4+7x_5+11x_6 \geq 100 \\ 6x_1+x_2+4x_3+8x_4+10x_5+9x_6 \geq 30 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 & 8 & 7 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} 60 \\ 49 \\ 46 \\ 56 \\ 56 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1 \quad x_4 := 1 \quad x_5 := 1 \quad x_6 := 1$$

Given

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \mathbf{P}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0$$

$$\text{Find}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5.273 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) := \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1 \quad x_4 := 1 \quad x_5 := 1 \quad x_6 := 1$$

$$\text{Maximize}(f, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{pmatrix} 3.696 \\ 7.826 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

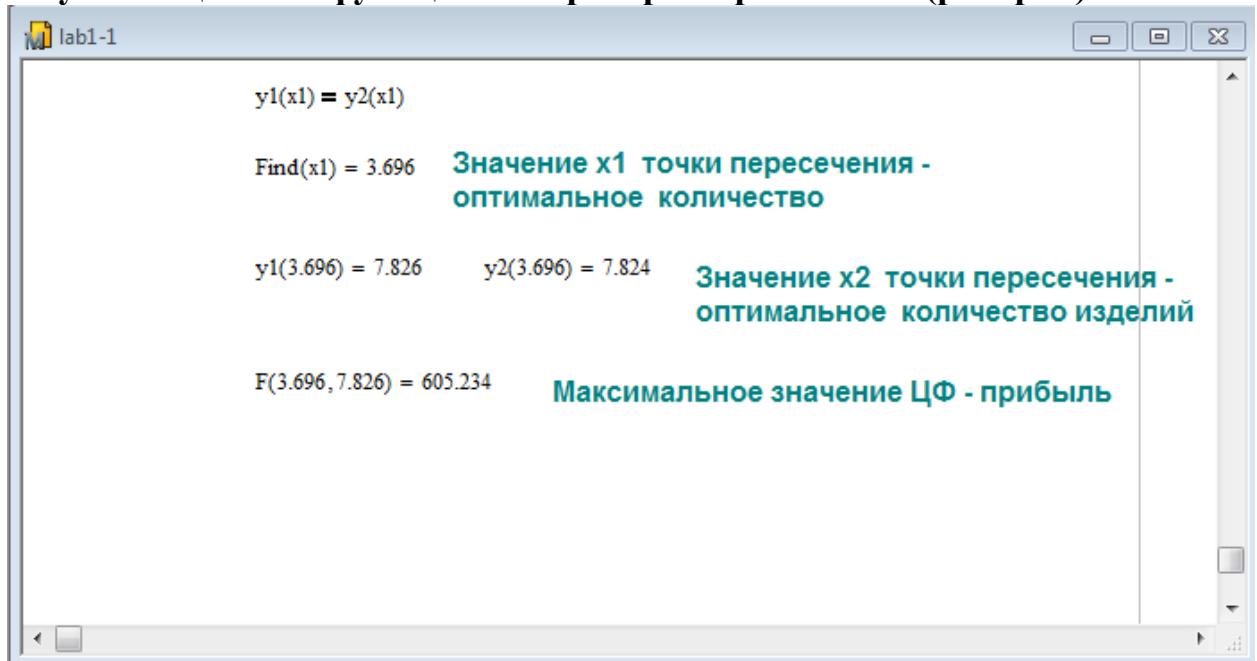
$$f(3.696, 7.826, 0, 0, 0, 0) = 605.234$$

$$X := \begin{pmatrix} 3.696 \\ 7.826 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad +$$

$$(A^T)^{(0)} \cdot X = 100.002$$

$$(A^T)^{(1)} \cdot X = 30.002$$

Результат целевой функции лабораторной работы №1(раскрой):



lab1-1

$y_1(x_1) = y_2(x_1)$

$\text{Find}(x_1) = 3.696 \quad \text{Значение } x_1 \text{ точки пересечения - оптимальное количество}$

$y_1(3.696) = 7.826 \quad y_2(3.696) = 7.824 \quad \text{Значение } x_2 \text{ точки пересечения - оптимальное количество изделий}$

$F(3.696, 7.826) = 605.234 \quad \text{Максимальное значение ЦФ - прибыль}$

б) о составлении оптимальной смеси;

**Таблица данных:**

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/ингредиента)			Стоимость (руб./кг)
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38	0	0	0,4
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,40

Окончательный вид математической формулировки задачи:

$$0.04X_1 + 0.15X_2 + 0.40X_3 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 10\,000 \\ 0.38X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 \geq 80 \\ 0.09X_2 + 0.50X_3 \geq 2200 \\ 0.02X_2 + 0.08X_3 \leq 500 \\ X_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

**Минимизация суммарной стоимости смеси**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 7 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Матрица (состава) смеси:**  
строки - элементы (в смеси 2 элемента);  
столбцы - ингредиенты (в смеси 6 ингредиента).

$$C := \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

**Вектор стоимостей ингредиентов** - показывает, сколько стоит одна единица измерения каждого из ингредиентов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Вектор решений

$$P := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

**Вектор плана** - учитывает требования по суммарному содержанию в смеси элементов A, B, C

$$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad \text{Произвольные начальные приближения}$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \geq P \quad \text{Выполнение требований плана}$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \quad \text{Физические ограничения}$$

$$\text{Find}(x1, x2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Нахождение начальной точки для оптимизации (конец блока решения Mathcad)}$$

В блоке решения пока нет целевой функции. После нахождения начальной точки для оптимизации, находим решение, вводя целевую функцию

$$f(x1, x2) := C \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 3$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \geq P \quad \begin{bmatrix} (A^T)^{(0)} \end{bmatrix} \cdot X = 11$$

$$\begin{bmatrix} (A^T)^{(1)} \end{bmatrix} \cdot X = 10$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \quad \begin{bmatrix} (A^T)^{(2)} \end{bmatrix} \cdot X = 16$$

$$\text{Minimize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} (A^T)^{(3)} \end{bmatrix} \cdot X = 7$$

$$f(1, 3) = 370 \quad \begin{bmatrix} (A^T)^{(4)} \end{bmatrix} \cdot X = 15$$

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} (A^T)^{(5)} \end{bmatrix} \cdot X = 13$$

$$f(x_1, x_2) := C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := 2.859 \quad x_2 := 1.714$$

Given

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq P$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{Maximize}(f, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.667 \end{pmatrix}$$

$$f(1; 1.667) = 250.03$$

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{(0)} \cdot X = 10.86$$

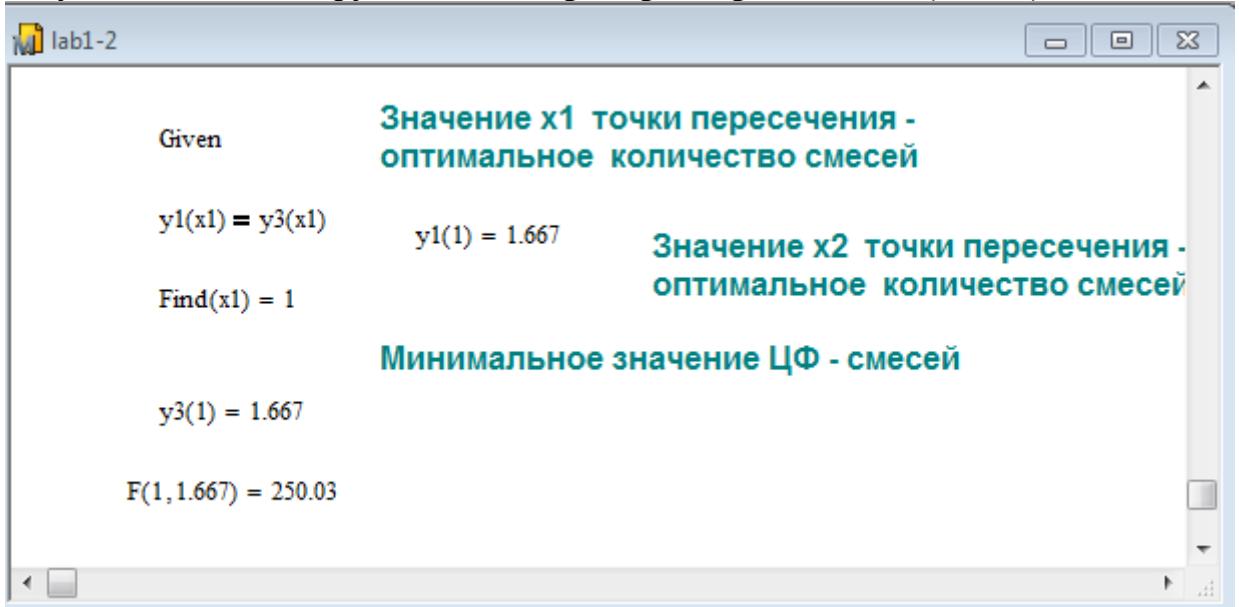
$$(A^T)^{(1)} \cdot X = 8.001$$

$$(A^T)^{(2)} \cdot X = 25.155$$

$$(A^T)^{(3)} \cdot X = 6.287$$

$$(A^T)^{(4)} \cdot X = 15.433$$

Результат целевой функции лабораторной работы №1(смеси):



## Минимизация отклонения состава смеси от требуемых показателей

### Исходные данные

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 7 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица (состава) смеси:  
строки - элементы (в смеси 2 элемента);  
столбцы - ингредиенты (в смеси 6 ингредиента).

$$C := \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Вектор стоимостей ингредиентов - показывает, сколько стоит  
одна единица измерения каждого из ингредиентов

$$P := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Вектор плана - учитывает требования по суммарному  
содержанию в смеси элементов А, В, С

### Решение

Шаг 1. Определение начальной точки, удовлетворяющей ограничениям, которая затем  
послужит начальным приближением для оптимизации

$x1 := 1$        $x2 := 1$       Произвольные начальные приближения

Given      Начало блока решения Mathcad

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \geq P \quad \text{Выполнение требований плана}$$

$x1 \geq 0$        $x2 \geq 0$       Физические ограничения

Find(x1, x2) = ■      Нахождение начальной точки для оптимизации  
(конец блока решения Mathcad)

В блоке решения пока нет целевой функции. После нахождения начальной точки для  
оптимизации, находим решение, вводя целевую функцию

## Шаг 2. Решение задачи оптимизации

$$g(x_1, x_2) := A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - P$$

Вспомогательная функция - задает вектор отклонений факта от плана по содержанию элементов в смеси

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{(g(x_1, x_2)_0)^2 + (g(x_1, x_2)_1)^2 + (g(x_1, x_2)_2)^2}$$

Целевая функция - модуль вектора отклонений факта от плана

Если записывать целевую функцию в виде

$$f(x_1, x_2) = |g((x_1, x_2))|$$

то Minimize не работает. Поэтому приходится явно расписать модуль вектора

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 3$$

Используем полученные после шага 1  
начальные приближения

Given

Начало блока решения Mathcad

Выполнение требований плана уже учтено при задании целевой  
функции, которую будем минимизировать

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Физические ограничения

$$\text{Minimize}(f, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.774 \\ 2.14 \end{pmatrix}$$

Полученное решение  
(конец блока решения Mathcad)

Аргументами функции Minimize являются:

первый аргумент - имя оптимизируемой функции (f);

остальные аргументы (x1, x2) - соответствуют аргументам оптимизируемой функции

$$X := \begin{pmatrix} 0.774 \\ 2.14 \end{pmatrix}$$

Задаем вектор решений

ORIGIN = 0

$$X_0 = 0.774 \quad x_1$$

$$X_1 = 2.14 \quad x_2$$

$$f(X_0, X_1) = 1.27$$

Находим значение целевой функции - модуль вектора  
отклонений факта от плана по содержанию элементов в  
смеси

$$C \cdot X = 270$$

Находим стоимость смеси.

Убеждаемся, что заданные ограничения по содержанию в смеси элементов А, С выполняются (хотя для элемента В имеет место небольшое невыполнение требований плана).

$$[(A^T)^{(0)}] \cdot X = 7.968$$

$$[(A^T)^{(1)}] \cdot X = 7.194$$

$$[(A^T)^{(2)}] \cdot X = 11.838$$

$$[(A^T)^{(3)}] \cdot X = 5.054$$

$$[(A^T)^{(4)}] \cdot X = 10.882$$

$$[(A^T)^{(5)}] \cdot X = ■$$

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$TOL = 1 \times 10^{-3}$$

в) о планировании выпуска продукции.

Вид готовой продукции	Выход готовой продукции из 1т картофеля, т		Потребности рынка сбыта, т
	Поставщик 1	Поставщик 2	
Дольки	0,2	0,3	1,8
Кубики	0,2	0,1	1,2
Хлопья	0,3	0,3	2,4
Относительная прибыль, ден.ед.	5,0	6,0	

$$x1 := 1 \quad x2 := 1$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \leq P$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$$

$$A := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$f(x1, x2) := C \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 1$$

Given

$$A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \leq P$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$$

$$P := \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 1$$

$$\text{Maximize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(4.5, 3) = 40.5$$

## Результат целевой функции лабораторной работы №1(планирование):

Given

$$y1(x1) = y2(x1)$$

$$\text{Find}(x1) = 4.5$$

**Значение x1 точки пересечения**

$$y1(4.5) = 3$$

$$y2(4.5) = 3$$

**Значение x2 точки пересечения**

$$F(4.5, 3) = 40.5$$

**Максимальное значение ЦФ - прибыль**

+

**Вывод:** Получили практические навыки решения задач линейного программирования (ЗЛП) средствами пакета Mathcad. В результате выполнения лабораторных работ №1 и №2 результаты целевых функций совпали.