ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 1
по дисциплине: **«Исследование операций»**

по теме: **« Построение математических моделей и решение задач линейного программирования графическим методом»**

Выполнил:

Принял:

Дата сдачи отчета: ____________________________
Дата допуска к защите: ____________________________
Дата защиты: ____________________________

Лабораторная работа 1
Построение математических моделей и решение задач линейного программирования графическим методом

Цель работы:

Получить практические навыки построения математических моделей задач математического программирования и решения простых задач линейного программирования (ЗЛП) графическим методом.

Теоретические сведения

http://www.edu.gstu.by/mod/folder/view.php?id=11586

№ вари-анта	ЗЛП о раскрое материала (кол-во вариантов раскроя / кол-во видов заготовок)	ЗЛП о составлении оптимальной смеси (кол-во ингредиентов / кол-во элементов)	ЗЛП о планировании выпуска продукции (кол-во видов продукции / кол-во видов используемых ресурсов)
3	6 / 2	3 / 3	3 / 2

1. Задача оптимального раскроя

На раскрой поступает материал одного образца. Из него необходимо вырезать заготовки 2 видов. Дано 6 вариантов раскроя. По каждому варианту даны: количество заготовок двух видов, полученных из одной единицы материала, и количество отходов, полученных из единицы материала.

По условию есть ограничение:

z1 не менее 100;

z2 не менее 30;

Таблица данных:

Раскрой / Заготовки	1	2	3	4	5	6	Ограничение, b
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z1	8	9	10	8	7	11	100
z2	6	1	4	8	10	9	30
Отходы	60	49	46	56	56	27	

Площади заготовок:

$S = 12 * 12 = 144$ (м^2)

$S_{квадр} = 9$ (м^2)

$S_{круг} = 2$ (м^2)

Найдем площадь отходов:

$S_1 = 144 – 8 * 9 – 6 * 2 = 60$(м^2)

$S_2 = 144 – 9 * 9 – 1 * 2 = 49$ (м^2)

$S_3 = 144 - 10 * 9 - 4 * 2 = 46$ (м^2)

$S_4 = 144 – 8 * 9 – 8 * 2 = 56$(м^2)

$S_5 = 144 – 7 * 9 – 10 * 2 = 56$ (м^2)

$S_6 = 144 - 11* 9 - 9 * 2 = 27$ (м^2)

Раскрой	1	2	3	4	5	6	Ограничение, b
Заготовки	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$z1_{круги}$	8	9	10	8	7	11	100
$z2_{треугольник}$	6	1	4	8	10	9	30
Отходы	60	49	46	56	56	27	

Целевая функция примет следующий вид:

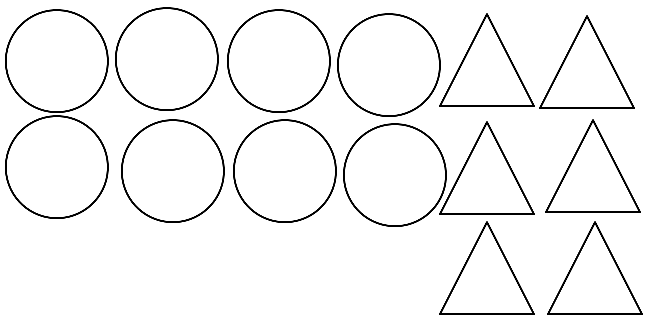
$F=60*x_1+49x_2+46x_3+56*x_1+56x_2+27x_3$ ->min

Система линейных уравнений:

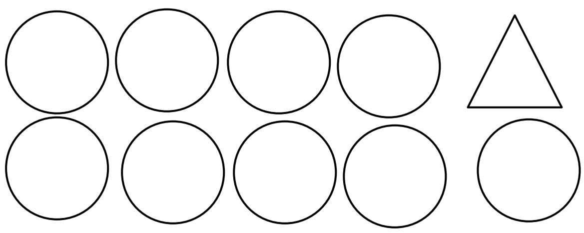
$$\begin{cases} 8*x_1+9*x_2+10*x_3+8*x_4+7*x_5+11*x_6 \geq 100 \\ 6*x_1+x_2+4*x_3+8*x_4+10*x_5+9*x_6 \geq 30 \end{cases}$$

Вариант раскроя:

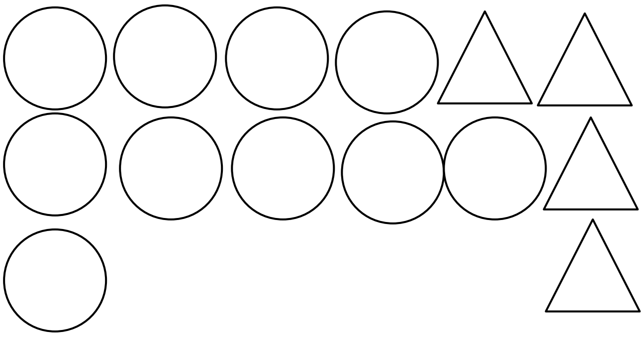
1-й вариант:



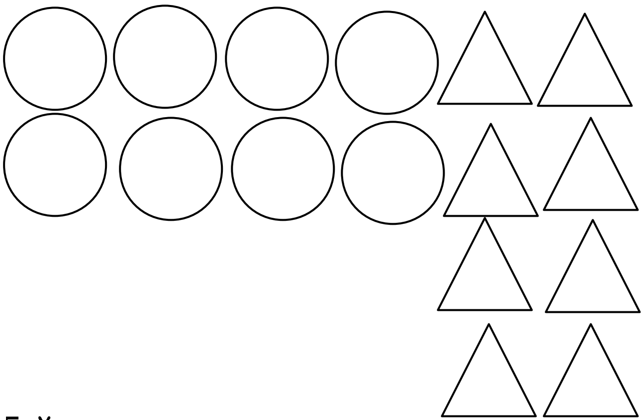
2-й вариант:



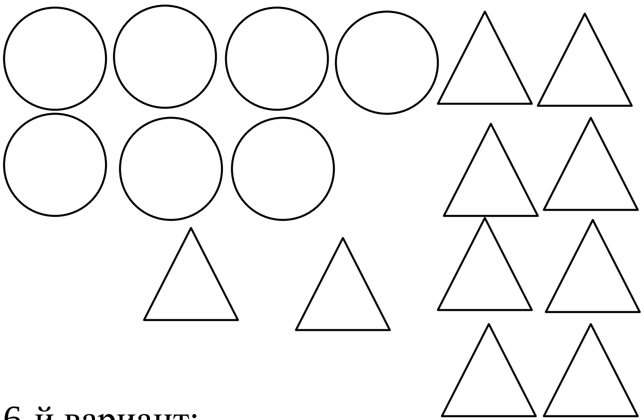
3-й вариант:



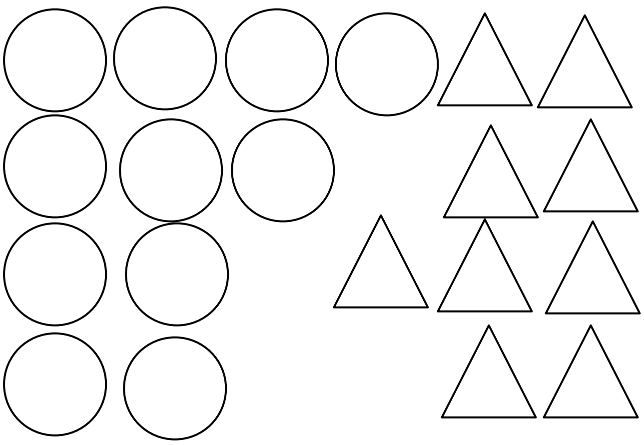
4-вариант:



5-й вариант:



6-й вариант:



2. <u>Задача о составлении оптимальной смеси</u>

Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 500г = 0.5 кг. Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов.
В табл. 2 приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Смесь должна содержать:

– не менее 0.8% кальция
– не менее 22% белка от общего веса смеси
– не более 5% клетчатки

Требуется определить количество (в кг) каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

Таблица данных:

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/ингредиента)			Стоимость (руб./кг)
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38	0	0	0,4
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,40

Математическая формулировка задачи.
Введем следующие обозначения:
X1 - содержание известняка в смеси (кг);
X2 - содержание зерна в смеси (кг);
X3 - содержание соевых бобов в смеси (кг);
Общий вес смеси, еженедельно расходуемый на кормление цыплят:
$20\,000 \times 0.5 = 10\,000$ кг.

Ограничения, связанные с содержанием кальция, белка и клетчатки в кормовом рационе, имеют вид:

$0.38X1 + 0.001X2 + 0.002X3 \geq 0.008 \times 10\,000,$
$0.09X2 + 0.50X3 \geq 0.22 \times 10\,000,$
$0.02X2 + 0.08X3 \leq 0.05 \times 10\,000.$

Окончательный вид математической формулировки задачи:
$0.04X1 + 0.15X + 0.40X3 \to \min$
при ограничениях

$$\begin{cases} X1 + X2 + X3 = 10\,000 \\ 0.38X1 + 0.001X2 + 0.002X3 \geq 80 \\ 0.09X2 + 0.50X3 \geq 2200 \\ 0.02X2 + 0.08X3 \leq 500 \\ Xj \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

3. **<u>Задача о планировании выпуска продукции</u>**

Проблема" *двух картошек*". Фирма по переработке картофеля производит три вида продукции: картофельные дольки, кубики и хлопья. Анализ загруженности оборудования и спроса на рынке показывает возможность произвести и сбыть до 1.8*т* долек, 1.2*т* кубиков и 2.4 *т* хлопьев. Необходимый для переработки картофель фирма закупает у двух поставщиков. Количество готовой продукции и относительная прибыль (доход от реализации готовой продукции за вычетом стоимости сырья), которые можно получить из одной *т* картофеля каждого поставщика, указаны в таблице. Требуется определить, какое количество картофеля надо приобрести у каждого поставщика, чтобы обеспечить наибольшую относительную прибыль с учетом возможности сбыта готовой продукции.

Таблица данных:

Вид готовой продукции	Выход готовой продукции из 1*т* картофеля, *т*		Потребности рынка сбыта, *т*
	Поставщик 1	Поставщик 2	
Дольки	0,2	0,3	1,8
Кубики	0,2	0,1	1,2
Хлопья	0,3	0,3	2,4
Относительная прибыль, *ден.ед.*	5,0	6,0	

Математическая формулировка задачи.

Введем следующие обозначения:

x_1 - количество картофеля (*т*), закупаемого у поставщиков 1

x_2 - количество картофеля (*т*), закупаемого у поставщиков 2

Целевая функция примет следующий вид:

F= $5x_1 + 6x_2$ -> max

при ограничениях

$0.2x1 + 0.3x2 \leq 1.8$
$0.2x1 + 0.1x2 \leq 1.2$
$0.3x1 + 0.3x2 \leq 2.4$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

2. Изменить условия задач из п. 1 таким образом, чтобы их можно было решать графическим методом (оставить только 2 неизвестных: x_1, x_2). Решить полученные задачи графическим методом с помощью пакета Mathcad. Подробно описать ход и результаты решения

1. **Задача оптимального раскроя**

На раскрой поступает материал одного образца. Из него необходимо вырезать заготовки 2 видов. Дано 2 вариантов раскроя. По каждому варианту даны: количество заготовок двух видов, полученных из одной единицы материала, и количество отходов, полученных из единицы материала.

По условию есть ограничение:
z1 не менее 100;
z2 не менее 30;

Раскрой / Заготовки	1 x_1	2 x_2	Ограничение, b
z1	8	9	100
z2	6	1	30
Отходы	60	49	

Целевая функция примет следующий вид:

$F=60*x_1+49x_2$ ->min

Система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 8*x_1+9*x_2 \geq 100 \\ 6*x_1+x_2 \geq 30 \end{cases}$$

$$y1(x1) := \frac{(100 - 8 \cdot x1)}{9}$$

$$y2(x1) := 30 - 6 \cdot x1$$

Задаем функции, определяющие границы ОДР (с учетом ограничений ЗЛП)

$$F(x1, x2) := 60 \cdot x1 + 49 \cdot x2$$

Задаем ЦФ

$$z1(x1) := \frac{700 - 60x1}{49}$$

$$z2(x1) := \frac{1000 - 60x1}{49}$$

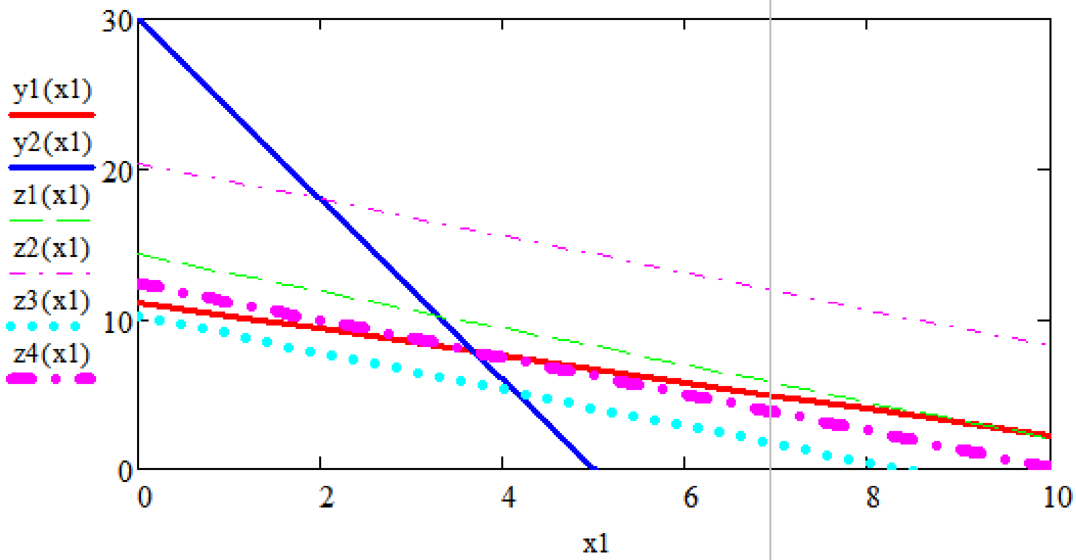
$$z3(x1) := \frac{500 - 60x1}{49}$$

$$z4(x1) := \frac{(605.217 - 60x1)}{49}$$

Задаем функции, определяющие несколько линий уровня ЦФ. При этом значения ЦФ - 1000, 700 - подбираются опытным путем, глядя на график ОДР (линии уровня должны попадать внутрь ОДР)

Строим графики, задающие ОДР и линии уровня ЦФ

$x1 := 0..15$



$x1 := 3.9$

Найдем координаты точки пересечения красной и зеленой прямых с помощью блока решения Mathcad.
Начальное приближение x1:=90 выбираем, глядя на графики

Given

$y1(x1) = y2(x1)$

$Find(x1) = 3.695652174$

Значение x1 точки пересечения

$x1 := 3.695652174$

$y1(x1) = 7.826086956$

$y2(x1) = 7.826086956$

$x2 := 30 - 6 \cdot x1$

Значение x2 точки пересечения

$F(x1, x2) = 605.217$

Максимальное значение ЦФ - прибыль

2. <u>Задача о составлении оптимальной смеси</u>

Таблица данных:

Ингредиенты	1 x1	2 x2	Ограничения
Fe	2	3	7
Cl	1	3	8
Al	7	3	12
Be	1	2	6
Na	3	4	15
Mg	4	3	13
Стоимость единицы ингредиента	100	90	

$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \geq 7$

$x1 + 3 \cdot x2 \geq 8$

$7 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \geq 12$

$x1 + 2 \cdot x2 \geq 6$

$3 \cdot x1 + 4 \cdot x2 \geq 15$

$4 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \geq 13$

$$y1(x1) := \frac{(7 - 2 \cdot x1)}{3}$$

Задаем функции, определяющие границы ОДР (с учетом ограничений ЗЛП)

$$y2(x1) := \frac{(8 - x1)}{3}$$

$$y3(x1) := \frac{(12 - 7 \cdot x1)}{3}$$

$$y4(x1) := \frac{(6 - x1)}{2}$$

$$y5(x1) := \frac{(15 - 3 \cdot x1)}{4}$$

$$y6(x1) := \frac{(13 - 4x1)}{3}$$

$F(x1, x2) := 100 \cdot x1 + 90 \cdot x2$ **Задаем ЦФ**

$$z1(x1) := \frac{(1500 - 100 \cdot x1)}{90}$$

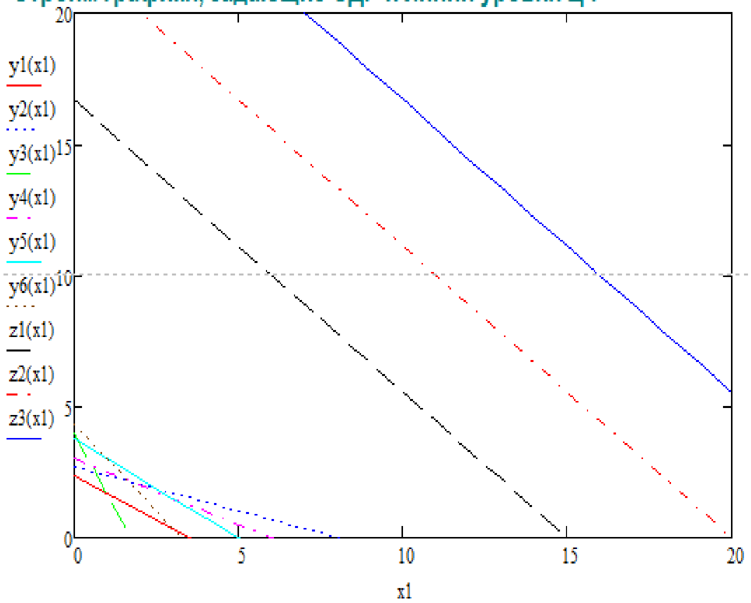
$$z2(x1) := \frac{(2000 - 100 \cdot x1)}{90}$$

$$z3(x1) := \frac{(2500 - 100 \cdot x1)}{90}$$

$x1 := 0..20$

Задаем функции, определяющие несколько линий уровня ЦФ. При этом значения ЦФ - 1500, 2000,2500 - подбираются опытным путем, глядя на график ОДР (линии уровня должны попадать внутрь ОДР)

Строим графики, задающие ОДР и линии уровня ЦФ



Видно, что максимальное значение ЦФ достигается на границе ОДР - в точке пересечения красной и зеленой прямых.

Найдем координаты точки пересечения красной и зеленой прямых с помощью блока решения Mathcad.
Начальное приближение x1:=1 выбираем, глядя на графики

$x1 := 1$

Given

Значение x1 точки пересечения - оптимальное количество смесей

$y1(x1) = y3(x1)$

$y1(1) = 1.667$

Значение x2 точки пересечения - оптимальное количество смесей

$Find(x1) = 1$

Минимальное значение ЦФ - смесей

$y3(1) = 1.667$

$F(1, 1.667) = 250.03$

3. <u>Задача о планировании выпуска продукции</u>

Таблица данных:

Вид готовой продукции	Выход готовой продукции из 1*т* картофеля, *т*		Потребности рынка сбыта, *т*
	Поставщик 1	Поставщик 2	
Дольки	0,2	0,3	1,8
Кубики	0,2	0,1	1,2
Хлопья	0,3	0,3	2,4
Относительная прибыль, *ден.ед.*	5,0	6,0	

Целевая функция примет следующий вид:
F= $5x_1 + 6x_2$ -> max

при ограничениях

$$\begin{cases} 0.2x1 + 0.3x2 \le 1.8 \\ 0.2x1 + 0.1x2 \le 1.2 \\ 0.3x1 + 0.3x2 \le 2.4 \\ x1 \ge 0,\ x2 \ge 0 \end{cases}$$

$$y1(x1) := \frac{(1.8 - 0.2 \cdot x1)}{0.3}$$

$$y2(x1) := \frac{1.2 - 0.2x1}{0.1}$$

$$y3(x1) := \frac{2.4 - 0.3x1}{0.3}$$

$$F(x1, x2) := 5 \cdot x1 + 6 \cdot x2$$

Задаем функции, определяющие границы ОДР (с учетом ограничений ЗЛП)

Задаем ЦФ

$$z1(x1) := \frac{50 - 5x1}{6}$$

$$z2(x1) := \frac{40 - 5x1}{6}$$

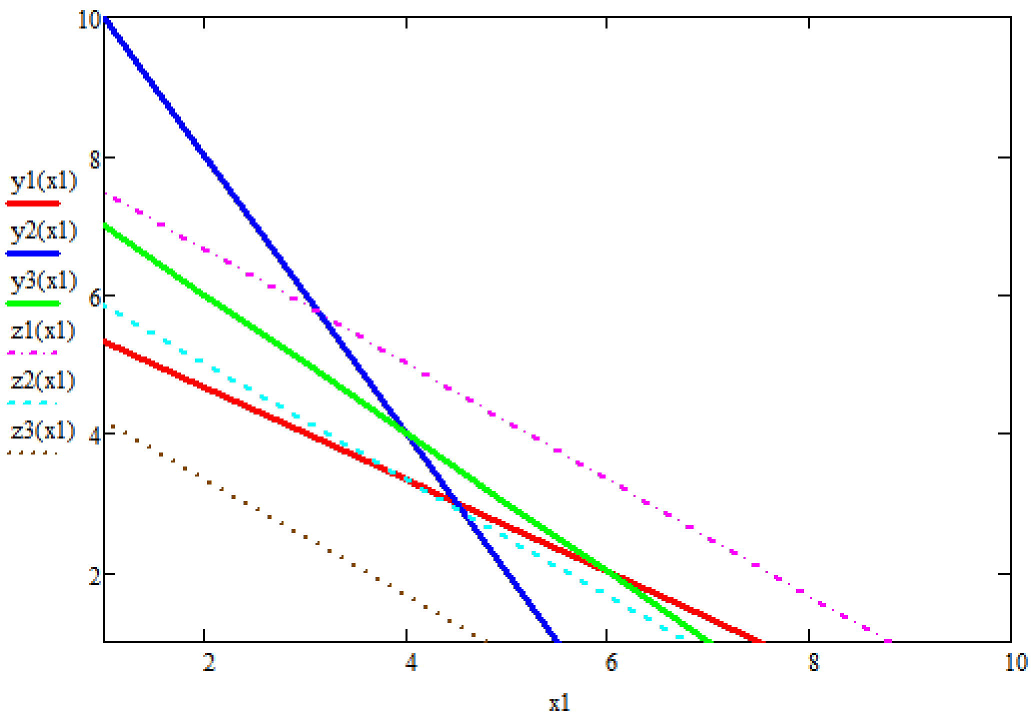
$$z3(x1) := \frac{30 - 5x1}{6}$$

$$z4(x1) := \frac{(605.217 - 60x1)}{49}$$

Задаем функции, определяющие несколько линий уровня ЦФ. При этом значения ЦФ - 50, 40, 30 - подбираются опытным путем, глядя на график ОДР (линии уровня должны попадать внутрь ОДР)

Строим графики, задающие ОДР и линии уровня ЦФ

$x1 := 0..15$



x1

$x1 := 5$

Найдем координаты точки пересечения красной и синих прямых с помощью блока решения Mathcad.
Начальное приближение x1:=5 выбираем, глядя на графики

Given

$y1(x1) = y2(x1)$

$\mathrm{Find}(x1) = 4.5$

Значение x1 точки пересечения

$y1(4.5) = 3$ $y2(4.5) = 3$

Значение x2 точки пересечения

$F(4.5, 3) = 40.5$

Максимальное значение ЦФ - прибыль

Вывод: Получила практические навыки построения математических моделей задач математического программирования и решения простых задач линейного программирования (ЗЛП) графическим методом.