

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

## 2.1. Линейные электрические цепи однофазного синусоидального тока

### 2.1.1. Получение синусоидальной ЭДС. Параметры, характеризующие ЭДС

**Переменным током** называется такой электрический ток, который изменяется по величине и направлению во времени. Синусоидальный ток изменяется во времени по синусоидальному закону.

Наибольшее распространение в электроэнергетике получили электрические цепи синусоидального тока.

По сравнению с постоянным током синусоидальный ток имеет ряд преимуществ:

- производство, передача и использование электрической энергии наиболее экономичны при синусоидальном токе;
- в цепях переменного тока можно относительно просто преобразовывать величину напряжения;
- самыми простыми, надежными и экономичными являются электрические двигатели трехфазного синусоидального тока;
- синусоидальные токи широко используются в радиоэлектронике, электротехнологии, в измерительной технике и других областях.

Теория однофазных синусоидальных токов служит базой для изучения более сложных видов токов (трехфазных синусоидальных и других периодических токов).

**Электрическая цепь синусоидального тока** – это электрическая цепь, в которой действуют ЭДС напряжения и токи, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad e = E_m \sin(\omega t + \psi_e), \quad (2.1)$$

где  $U_m$ ,  $I_m$ ,  $E_m$  – амплитудные значения напряжения, тока и ЭДС;  $\omega = 2\pi f$  – угловая частота;  $\omega t + \psi_u$ ,  $\omega t + \psi_i$ ,  $\omega t + \psi_e$  – полные фазовые углы напряжения, тока и ЭДС;  $\psi_u$ ,  $\psi_i$ ,  $\psi_e$  – начальные фазовые углы напряжения, тока и ЭДС.

Впервые генератор и трансформатор синусоидального тока создал П. Н. Яблочков для питания изобретенной им в 1876 г. электрической свечи.

В середине 80-х годов XIX века были разработаны образцы однофазных трансформаторов с замкнутым магнитопроводом (первый

патент был получен венгерскими инженерами М. Дери, О. Блати и К. Циперновским).

Следующий решающий шаг в исследовании переменных токов сделал выдающийся русский ученый М. О. Доливо-Добровольский, который разработал все основные элементы системы трехфазного синусоидального тока: генератор, трансформатор, линию передачи и двигатель и продемонстрировал эту систему на Всемирной выставке в Германии в 1891 г.

Для получения синусоидальной ЭДС в настоящее время на электростанциях применяются электромашинные генераторы (синхронные генераторы).

Простейшим генератором синусоидальной ЭДС может служить проводник в виде прямоугольной рамки (рис 2.1, а), вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega = \frac{\varphi}{t}$  в постоянном однородном поле (на рис. 2.1, б показано сечение рамки перпендикулярно оси вращения  $O$ ).

Если в момент начала отсчета времени  $t = 0$  рамка находилась под углом  $\psi_e$  к плоскости, перпендикулярной линиям магнитного поля  $B$ , то согласно закону электромагнитной индукции при вращении рамки в каждом ее продольном проводнике (направленном перпендикулярно плоскости рисунка) будет наводиться изменяющаяся ЭДС :

$$e = BlV_{\dot{\varphi}} = BlV \sin(\omega t + \psi_e) = E_m \sin(\omega t + \psi_e), \quad (2.2)$$

где  $B$  – магнитная индукция;  $l$  – длина продольного проводника рамки;  $V$  – линейная скорость движения проводника;  $\omega t$  – угол поворота рамки за время  $t$ ;  $E_m = BlV$  – амплитудное значение ЭДС;  $V_n$  – составляющая линейной скорости проводника, перпендикулярная линиям индукции  $B$  магнитного поля.

Следовательно, величина ЭДС  $e$ , наводимая на концах проводников рамки, изменяется во времени по синусоидальному закону (рис. 2.2).

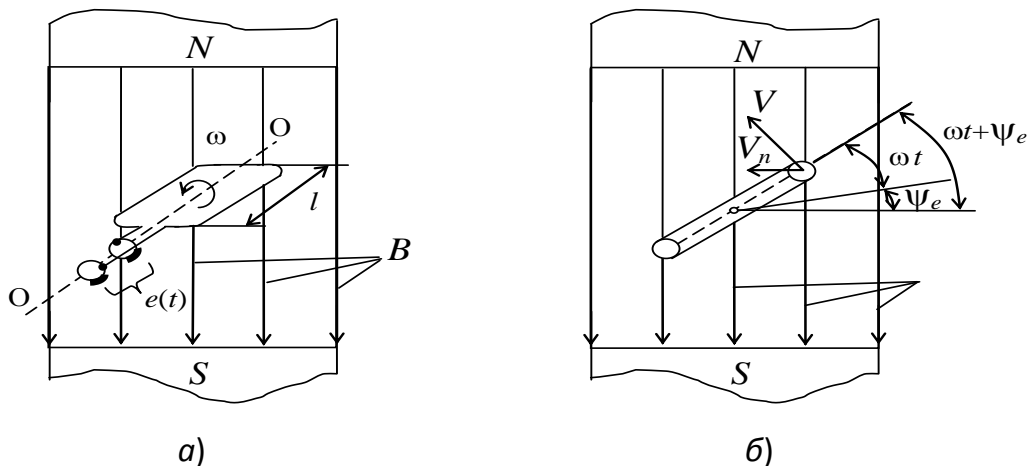


Рис. 2.1. Модель генератора синусоидальной ЭДС

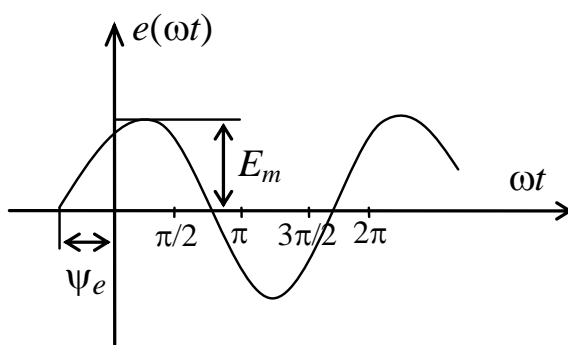


Рис. 2.2. График зависимости ЭДС генератора от угла поворота рамки  $\varphi = \omega t$

Пользуясь правилом правой руки, можно определить направление ЭДС в каждый полупериод.

Под действием такой синусоидальной ЭДС в нагрузке, подключенной к генератору (к рамке), будет протекать синусоидальный ток  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , а произведение величины тока  $i$  на величину электрического сопротивления нагрузки будет представлять электрическое напряжение на нагрузке  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ .

Величины  $e$ ,  $i$ ,  $u$ , определяющие значения ЭДС, тока и напряжения в каждый рассматриваемый момент времени  $t$ , называются **мгновенными величинами**. Максимальные значения этих величин за время  $T = 2\pi/\omega$  обозначаются  $E_m$ ,  $I_m$ ,  $U_m$  и называются **амплитудными** значениями ЭДС, тока и напряжения.

Аргументы синусоидальных функций  $\omega t + \psi_e$ ,  $\omega t + \psi_i$ ,  $\omega t + \psi_u$  называются **фазовыми углами**, или **фазами ЭДС**  $e$  тока  $i$  и напряжения  $u$ .

Величины  $\psi_e$ ,  $\psi_i$ ,  $\psi_u$ , равные значениям аргументов соответствующих синусоидальных функций при  $t = 0$ , называются **начальными фазовыми углами**, или **начальными фазами**. Измеряются фазы в радианах или градусах. (Начальные фазы отсчитываются от начала координат до точки перехода синусоидальной функции через нуль к положительному значению.) Величина  $\omega = 2\pi f$ , определяющая скорость изменения аргумента синусоидальной функции, называется **угловой частотой**  $\omega$ , измеряется в рад/с.

Наименьший интервал времени  $T = 2\pi/\omega$ , по истечению которого мгновенные значения синусоидальных функций повторяются, называется **периодом** и измеряется в секундах (с). Величина  $f = 1/T$ , определяющая число полных повторений синусоидальной функции в единицу времени, называется **циклической частотой**. Эта величина измеряется в герцах (Гц).

Величина  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ , равная разности начальных фаз напряжений и тока, называется **сдвигом фаз** между напряжением и током.

Величины  $E$ ,  $U$ ,  $I$  называются **действующими значениями** ЭДС, тока и напряжения и определяются как среднеквадратичные значения этих величин за период времени  $T$ . Наименование «действующее» объясняется тем, что тепловой и силовой эффекты синусоидального тока за период равны тепловому и силовому эффекту постоянного тока, значение которого равно действующему значению синусоидального тока за тот же интервал времени  $T$ .

При синусоидальном токе за период  $T$  в сопротивлении  $R$  выделится энергия

$$W' = \int_0^T R i^2 dt. \quad (2.3)$$

За это же время  $T$  в таком же сопротивлении  $R$  при протекании постоянного тока  $I$  (равного по величине действующему значению переменного тока) выделится такое же количество энергии

$$W'' = R I^2 T. \quad (2.4)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.3) и (2.4), получим

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (I_m \sin \omega t)^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt} = \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)_0^T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \left( T - \frac{\sin 2\omega T}{4\pi f} \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжения:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m.$$

В паспортах электротехнических устройств синусоидального тока указываются действующие значения напряжений и токов, а большинство приборов, применяемых для измерения синусоидальных напряжений и токов, проградуированы в действующих значениях.

Величины  $E_{cp}$ ,  $I_{cp}$ ,  $U_{cp}$  называются **средними значениями** ЭДС, тока и напряжения, и определяются как средние значения синусоидальных функций за положительный полупериод (когда мгновенные значения положительные):

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = -\frac{I_m}{T \omega} \left| \cos \omega t \right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m.$$

Аналогично определяются средние значения ЭДС и напряжений

$$E_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} E_m = 0,637 E_m, \quad U_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m.$$

### 2.1.2. Представление синусоидальных функций в различных формах

**Аналитическое представление.** Синусоидальную функцию можно аналитически задать формулой (2.1). Для расчета электрических цепей такое представление неудобно, т. к. алгебраические действия с тригонометрическими функциями приводят к громоздким вычислениям. Так, сумма синусоидальных токов  $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1i})$  и  $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{2i})$  равна

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1i}) + I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{2i}) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

где  $I_m = \sqrt{(I_{1m})^2 + (I_{2m})^2 + 2 I_{1m} I_{2m} \cos(\psi_{1i} - \psi_{2i})}$ ;

$$\psi_i = \arctg \frac{I_{1m} \sin \psi_{1i} + I_{2m} \sin \psi_{2i}}{I_{1m} \cos \psi_{1i} + I_{2m} \cos \psi_{2i}}.$$

Графическое представление синусоидальных величин (рис. 2.2) достаточно наглядно, но из-за сложности построения синусоид применяется относительно редко.

Представление вращающимися векторами позволяет наглядно показать количественные и фазовые соотношения в цепях синусоидального тока и широко применяется при объяснении физических процессов и выводе основных соотношений.

На рис. 2.3, а представлен радиус-вектор  $I_m$ , вращающийся в плоскости декартовых координат  $XOY$  против часовой стрелки с равномерной угловой скоростью  $\omega$  и поворачивающийся за время  $T$  на угол  $2\pi$ , т. е.  $\omega T = 2\pi$ . Положение радиус-вектора относительно оси  $OX$  в момент начала отсчета времени определяется углом  $\psi_i$ .

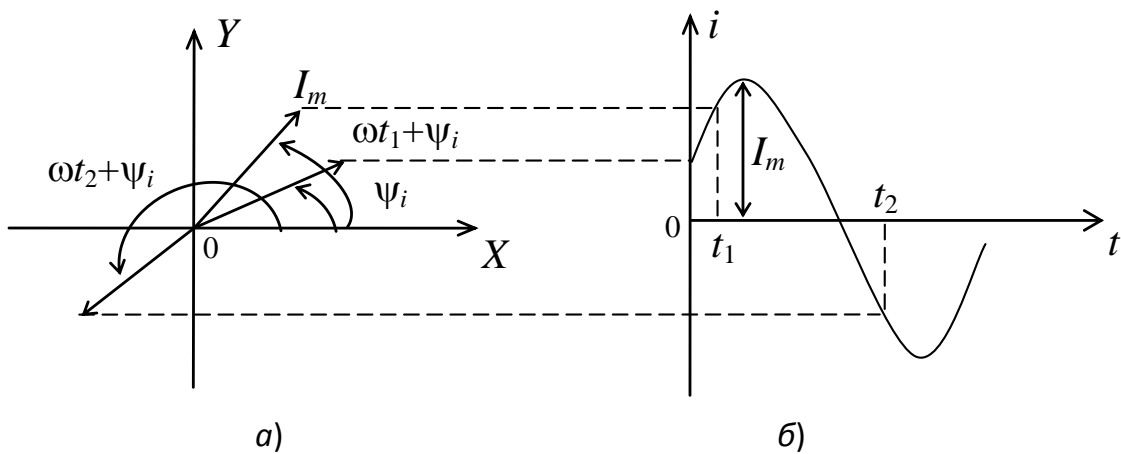


Рис. 2.3. Представление синусоидального тока вращающимся вектором (а); график зависимости проекции вектора  $I_m$  на ось ординат от времени (б)

За время  $t_1$  радиус-вектор повернется на угол  $\omega t_1$  и его положение относительно оси  $OX$  определится углом  $\omega t_1 + \psi_i$ .

Проекция этого вектора на ось ординат определится выражением

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

т. е. численно равна мгновенному значению функции времени. Эти проекции для каждого момента времени построены на рис. 2.3, б. Таким образом, можно утверждать, что любому равномерно вращающемуся радиус-вектору однозначно соответствует некоторая синусоидальная функция со своей амплитудой и фазой. И наоборот, любая синусоидальная функция времени может быть условно изображена однозначно соответствующим ей радиус-вектором, длина которого равна амплитудному значению синусоиды, а начальное положение относительно оси  $OX$  равно начальной фазе синусоиды.

Как, используя такой графический образ синусоиды, т. е. радиус-вектор, можно производить расчеты цепей переменного тока?

Определим, например,  $i = i_1 + i_2$ , где  $i_1 = I_{1m} \sin \omega t + \psi_{1i}$ ,  $i_2 = I_{2m} \sin \omega t + \psi_{2i}$ .

Как известно, сумма двух синусоид одинаковой частоты  $\omega$  есть также синусоида частоты  $\omega$ , т. е.  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$  и, следовательно, задача сводится к нахождению  $I_m$  и  $\psi_i$  суммарного тока. Это сложение векторов представлено на рис. 2.4, где применено правило параллелограмма.

Измерив длину диагонали параллелограмма и зная масштаб тока, можно определить амплитуду тока  $I_m$  в амперах. Непосредственно по чертежу (рис. 2.4) определяется и начальная фаза  $\psi_i$  суммарного тока.

Совокупность радиус-векторов (ЭДС  $E$ , напряжений  $U$ , токов  $I$ ), изображающих синусоидальные функции времени в общей системе координат, называют **векторной диаграммой**.

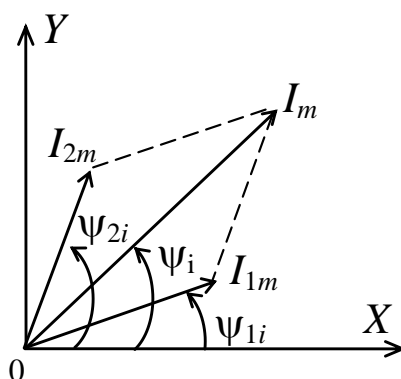


Рис. 2.4. Графическое (векторное) сложение синусоидальных токов одинаковой частоты

В электротехнике векторы изображают не вращающимися, а неподвижными (для момента времени  $t = 0$ ). При этом взаимное положение векторов зависит от углов сдвига фаз между ЭДС  $E$ , током  $I$ , напряжением  $U$ .

Недостатком данного метода представления синусоидальных функций является ограниченная точность.

**Представление при помощи комплексных чисел.** Совместить наглядность, которую дают векторные диаграммы, с возможностью проведения точных математических расчетов можно, воспользовавшись представлением синусоидальных функций времени комплексными числами (символами, изображениями).

Для представления синусоидального тока в комплексной форме перенесем радиус-вектор  $I_m$  из плоскости декартовых координат  $XU$  на плоскость комплексных чисел (рис. 2.5), совмещая ось  $X$  с осью действительных чисел  $Re$  (от фр. слова *Real* – действительный), а ось  $Y$  – с осью мнимых чисел  $Im$  (от фр. слова *Imaginaire* – мнимый). При этом длина вектора  $I_m$  равна амплитуде синусоидального тока, а положение его относительно оси действительных чисел задается углом  $\psi_i$ , равным начальной фазе тока.

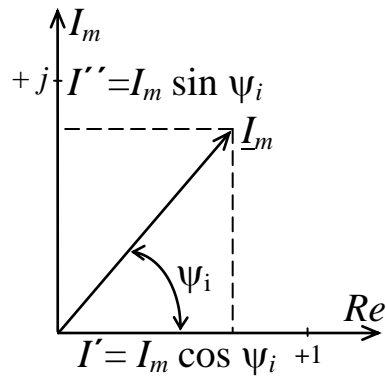


Рис. 2.5. Представление (задание) синусоидального тока в форме комплексного числа

Из рис. 2.5 следует, что вектор тока  $\underline{I}_m$  как комплексное число может быть записан в алгебраической форме  $\underline{I}_m = I' + jI''$ , в тригонометрической форме  $\underline{I}_m = I \cos \psi_i + jI \sin \psi_i$ , в показательной форме  $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ .

При записи комплексного тока в показательной форме учтена формула Эйлера  $e^{j\psi_i} = \cos \psi_i + j \sin \psi_i$ ;  $e^{-j\psi_i} = \cos \psi_i - j \sin \psi_i$ .

В электротехнике, в отличие от математики, мнимую единицу  $\sqrt{-1}$  обозначают через  $j$ , т. к. буква  $i$  принята для обозначения мгновенного значения тока.

Переход от алгебраической формы записи к показательной и тригонометрической выполняется по формулам, полученным из рис. 2.5:

$$I = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2}; \quad \psi_i = \arctg \frac{I''}{I'} \text{ при } I' > 0;$$

$$\psi_i = \arctg \frac{I''}{I'} + 180^\circ \text{ при } I' < 0. \quad (2.6)$$

Величины  $\underline{E}_m$ ,  $\underline{U}_m$ ,  $\underline{I}_m$  называют **комплексными амплитудами** тока, напряжения и ЭДС, а величины  $\underline{E}$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$  **комплексными действующими значениями** тока, напряжения и ЭДС или комплексным током  $\underline{I}$ , комплексным напряжением  $\underline{U}$  и комплексной ЭДС  $\underline{E}$ . При этом  $\underline{E} = \underline{E}_m / \sqrt{2}$ ,  $\underline{U} = \underline{U}_m / \sqrt{2}$ ,  $\underline{I} = \underline{I}_m / \sqrt{2}$ .

Выражение  $e^{j\alpha}$  называют **оператором поворота**, т. к. умножение какого-либо вектора  $\underline{A}$  на  $e^{j\alpha}$  равносильно повороту его на комплексной плоскости на угол  $\alpha$ :

$$\underline{A}e^{j\alpha} = A e^{j\psi_a} e^{j\alpha} = A e^{j(\psi_a + \alpha)}.$$

Если в частности:  $\alpha = \pi$ , то  $e^{j\pi} = -1$  (поворот на  $180^\circ$ );



$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ то } e^{j\frac{\pi}{2}} = +j \text{ (поворот на } 90^\circ\text{);}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}, \text{ то } e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \text{ (поворот на } -90^\circ\text{).}$$

Метод расчета электрической цепи синусоидального тока, основанный на изображении синусоидальных функций комплексными числами, получил название *символического* метода расчета.

### 2.1.3. Особенности электромагнитных процессов в цепях переменного тока

Электромагнитные явления в цепях переменного тока более сложны, чем в цепях постоянного тока, т. к. кроме процессов необратимых преобразований электрической энергии в другие виды энергии имеют место сложные явления, происходящие в переменном электромагнитном поле.

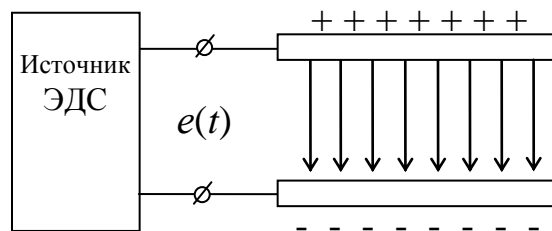


Рис. 2.6. Распределение зарядов на проводниках (обкладках конденсатора), подключенных к выводам источника ЭДС

Пусть к источнику ЭДС  $e(t)$  на рис. 2.6 подключены два проводника, разделенные диэлектриком. Если разность потенциалов между проводниками изменяется во времени, то в пространстве между проводниками возникает переменное электрическое поле, под действием которого молекулы диэлектрика поляризуются (т. е. периодически изменяются ориентации дипольных молекул в пространстве). Связь между напряжением  $U$ , между проводниками и зарядом  $Q$  на них имеет вид  $Q = CU$ , где коэффициент пропорциональности  $C$  называется *электрической емкостью*, измеряемой в фарадах (Ф).

Линейная связь между напряжением  $U$  и зарядом  $Q$  имеет место только для линейных сред.

При изменении напряжения  $U$  заряды  $Q$  на электродах перераспределяются, что сопровождается их движением, т. е. электрическим током:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du_c}{dt}. \quad (2.7)$$

Пусть два проводника, разделенные диэлектриком (т. е. конденсатор), заряжаются от нулевого напряжения до напряжения  $U$  источника.

Приращение  $dW_э$  энергии электрического поля конденсатора за время  $dt$  составит

$$dW_э = u_c i dt. \quad (2.8)$$

С учетом (2.7) это выражение переписывается в виде

$$dW_э = u_c C (du_c / dt) dt = u_c C du_c. \quad (2.9)$$

Тогда к моменту окончания процесса заряда конденсатора до напряжения  $U$  источника, энергия его электрического поля будет равна

$$W_э = \int_0^U C u_c du_c = C \int_0^U u_c du_c = \frac{C u_c^2}{2} \Big|_0^U = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}. \quad (2.10)$$

Пусть через катушку индуктивности  $L$  (рис. 2.7) протекает переменный ток  $i$ .

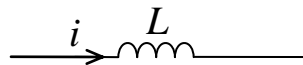


Рис. 2.7. Схема катушки индуктивности, обтекаемой током

Из курса физики известно, что изменяющийся электрический ток создает в окружающем его пространстве переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, индуцирует в катушке ЭДС **самоиндукции**  $e_L$ . Значение  $e_L$  определяется согласно закону электромагнитной индукции скоростью изменения потокосцепления  $\Psi_L$  катушки с магнитным полем:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt}, \quad (2.11)$$

где  $\Psi_L = \sum_{k=1}^w \Phi_k$  – потокосцепление самоиндукции;  $w$  – число витков в катушке;  $\Phi_k$  – магнитный поток, равный потоку вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через поверхность  $\vec{S}_k$ , ограниченной контуром витка:

$$\Phi_k = \int_{S_k} \vec{B} d\vec{S}. \quad (2.12)$$

В частности, если все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то

$$\Psi_L = w\Phi. \quad (2.13)$$

Связь между потокосцеплением  $\psi$  и током  $i$  определяется вебер-амперной характеристикой, которая может быть линейной и нелинейной. Для линейных сред эта связь имеет вид

$$\Psi_L = Li, \quad (2.14)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью катушки** и измеряется в генри (Гн).

Таким образом, выражение (2.11) закона электромагнитной индукции можно записать в виде

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d\Psi_L}{di} \cdot \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (2.15)$$

Пусть ток в катушке индуктивности, подключенной к источнику постоянного тока, изменяется от нуля до  $I$ .

Прирост энергии  $dW_1$  магнитного поля катушки за время  $dt$  составит

$$dW_M = u_L i dt. \quad (2.16)$$

Так как падение напряжения  $u_L$  на катушке связано с ЭДС самоиндукции  $e_L$  (в соответствии со вторым законом Кирхгофа) соотношением

$$u_L = -e_L = L(di/dt), \quad (2.17)$$

то

$$dW_1 = L \frac{di}{dt} i dt = L i di. \quad (2.18)$$

Следовательно, к моменту окончания процесса возрастания тока от 0 до  $I$ , энергия, запасенная в магнитном поле катушки, будет равна

$$W_1 = \int_0^I L i di = L \frac{i^2}{2} \Big|_0^I = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi I}{2}. \quad (2.19)$$

Таким образом, из рассматриваемых явлений следует, что скорость поступления энергии, т. е. мгновенная мощность  $p = iu$ , запасенная в электротехнических устройствах переменного тока, может измениться и по величине и по знаку, а при анализе переменного тока необходимо учитывать наличие как токов смещения в диэлектриках, так и ЭДС самоиндукции в катушках индуктивности.

Помимо явления самоиндукции в магнитно-связанных контурах или катушках электрической цепи переменного тока имеет место явление взаимной индукции.

Пусть в первой катушке на рис. 2.8 протекает ток  $i_1$ , заданный источником питания.

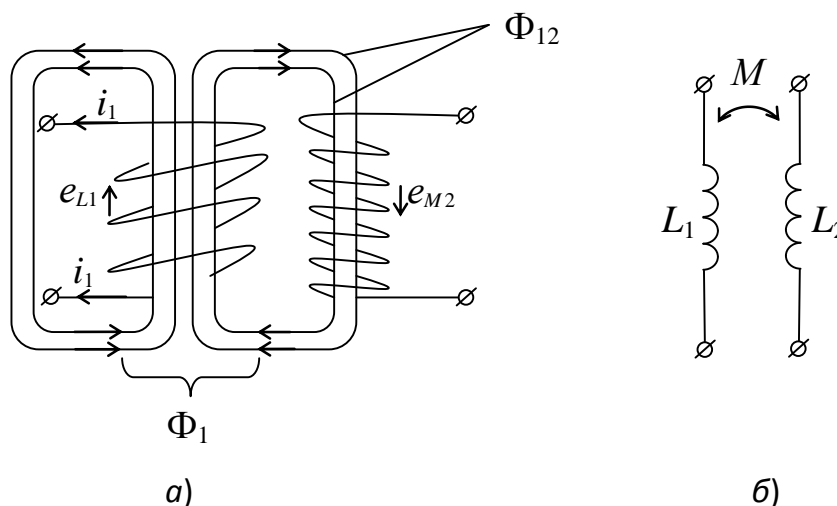


Рис. 2.8. Магнитно-связанные катушки индуктивности (а); обозначение магнитной связи катушек индуктивности на схемах (б)

Ток первой катушки  $i_1$  создает магнитный поток  $\Phi_1$ , который пронизывает первую катушку и наводит в ней ЭДС самоиндукции  $e_{L1}$ . Часть потока  $\Phi_{12}$  пронизывает витки второй катушки, поэтому из-за изменения потокосцепления  $\Psi_{12}$ , в ней наводится ЭДС  $e_{M2}$ , называемая ЭДС **взаимной индукции**. Если во второй катушке протекает ток  $i_2$ , то он создает свой магнитный поток  $\Phi_2$ , индуцирующий в этой катушке ЭДС самоиндукции  $e_{L2}$ . Часть магнитного потока  $\Phi_{21}$  пронизывает витки первой катушки, поэтому из-за изменения

потокосцепления  $\Psi_{21}$  в первой катушке наводится ЭДС взаимной индукции  $e_{M1}$ .

Установим связь между ЭДС взаимной индукции и токами  $i$ , их вызывающими.

В линейных цепях потоки и потокосцепления пропорциональны токам  $\Psi_{12} = M_{12}i_1$  и  $\Psi_{21} = M_{21}i_2$ , где  $M_{12}$  и  $M_{21}$  – коэффициенты пропорциональности, называемые **взаимной индуктивностью**. Принцип взаимности для линейных систем требует равенства

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Взаимная индуктивность зависит от геометрических размеров связанных магнитно катушек индуктивности, формы и взаимного расположения этих катушек, а также от магнитных свойств окружающей их среды. Единицей взаимной индуктивности, как и индуктивности катушек, является генри (Г). На схемах магнитная связь катушек индуктивности показывается по рис. 2.8, б.

По закону электромагнитной индукции ЭДС взаимной индукции равны

$$\left. \begin{aligned} e_{M2} &= -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\frac{d\Psi_{1i}}{di_1} \frac{di_1}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}; \\ e_{M1} &= -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d\Psi_{2i}}{di_2} \frac{di_2}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Степень магнитной связи характеризуется коэффициентом связи

$$K = \sqrt{\frac{\Psi_{12}\Psi_{21}}{\Psi_1\Psi_2}} = \sqrt{\frac{M^2}{L_1L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}. \quad (2.21)$$

При этом  $K < 1$ , т. к.  $\Psi_{12}\Psi_{21} < \Psi_1\Psi_2$ .

Таким образом, при наличии магнитной связи между катушками индуктивности в каждой из них индуктируются две ЭДС: ЭДС самоиндукции  $e_L$  и ЭДС взаимной индукции  $e_M$ . Если направления магнитных потоков  $\Phi_1$  и  $\Phi_{21}$ , пронизывающих первую катушку и соответственно потоков  $\Phi_2$  и  $\Phi_{12}$ , пронизывающих вторую катушку, совпадают, то такие потоки называют **согласными**, если же направления этих потоков противоположны, то потоки называются **встречными**.

При согласном направлении потоков (при согласном включении катушек индуктивности) ЭДС самоиндукции и взаимной индукции складываются ( $e_L + e_M$ ), при встречном – вычитаются ( $e_L - e_M$ ).

### 2.1.4. Идеальные элементы схемы замещения электрической цепи синусоидального тока и их условные обозначения

При расчете электрических цепей переменного тока так же как и при расчете цепей постоянного тока, реальную электрическую цепь заменяют расчетным эквивалентом (схемой замещения) с соблюдением определенных правил и допущений, существенно упрощающих расчеты.

Схемы замещения составляют, применяя в них идеализированные элементы с учетом их условных обозначений (рис. 2.9, Приложение 1).

В качестве источников в схемах замещения применяют идеальный источник ЭДС (рис. 2.9, *з*) и идеальный источник тока (рис. 2.9, *д*).

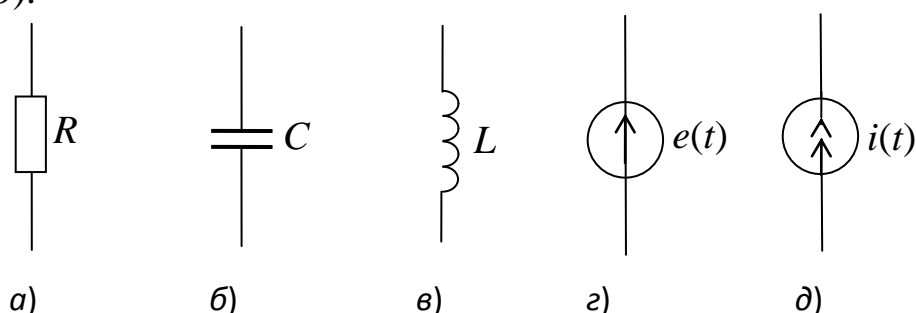


Рис. 2.9. Условные графические обозначения элементов схемы замещения цепи синусоидального тока

**Идеальным источником ЭДС** называется такой источник электрической энергии, амплитуда ЭДС, частота и начальная фаза которого не зависят от тока ( $e$ -элемент).

**Идеальным источником тока** называется такой источник электрической энергии, амплитуда тока, частота и начальная фаза которого не зависят от напряжения на клеммах ( $i$ -элемент).

В качестве приемников в схемах замещения цепей синусоидального тока применяют идеальный резистивный элемент (рис. 2.9, *а*) ( $R$ -элемент), идеальный емкостный элемент ( $C$ -элемент) (рис. 2.9, *б*) и идеальный индуктивный элемент ( $L$ -элемент) (рис. 2.9, *в*).

**$R$ -элемент** характеризуется только электрическим сопротивлением  $R$ , величина которого зависит от частоты и температуры и всегда больше, чем на постоянном токе. В теории линейных электрических цепей считается, что сопротивление  $R$ -элемента не зависит от величины тока  $I$ , т. е. его вольт-амперная характеристика линейная.

К идеальным резистивным элементам могут быть отнесены (на

промышленной частоте  $f = 50$  Гц) реостаты, большинство электронагревательных приборов, лампы накаливания.

Допущение для  $R$ -элемента состоит в том, что его собственными емкостью и индуктивностью пренебрегают.

**$C$ -элемент** характеризуется электрической емкостью. У такого элемента магнитное поле токов очень мало. Электрическая энергия, теряемая в нем на нагрев диэлектрика, также пренебрежимо мала, поэтому энергетические процессы практически определяются только явлениями, происходящими в электрическом поле.

**$L$ -элемент** характеризуется только величиной индуктивности. Таким элементом является катушка индуктивности, для которой можно пренебречь межвитковой (собственной) емкостью и активным сопротивлением провода катушки  $R_k$ . Электрические процессы в  $L$ -элементе определяются только явлениями, происходящими в магнитном поле.

$e$ -элемент характеризуется только величиной ЭДС  $E$ . С высоким приближением таким источником можно считать промышленную электросеть переменного тока. Принято считать, что  $U_m$ ,  $\omega$  и  $\psi_u$  промышленной электросети не зависят от величины тока.

С помощью рассмотренных выше идеальных элементов составляются схемы замещения реальных электрических цепей.

### 2.1.5. Закон Ома и законы Кирхгофа для цепей синусоидального тока

Закон Ома для мгновенных значений напряжения и тока можно записать для резистивного элемента ( $R$ -элемента) в виде соотношений (2.22). В цепях, содержащих катушки индуктивности и конденсаторы, при протекании через них синусоидальных токов имеет место сдвиг фаз между током и напряжением, что будет показано в следующих разделах:

$$i = \frac{u}{R}, (u = iR, R = \frac{u}{i}). \quad (2.22)$$

**Первый закон Кирхгофа** для мгновенных значений токов в ветвях имеет следующую формулировку: алгебраическая сумма мгновенных токов в узле равна нулю

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (2.23)$$

где  $n$  – число ветвей, соединенных в узле.

Так, для узла, изображенного на рис. 2.10,  $a$ , по первому закону Кирхгофа

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 + i_5 = 0.$$

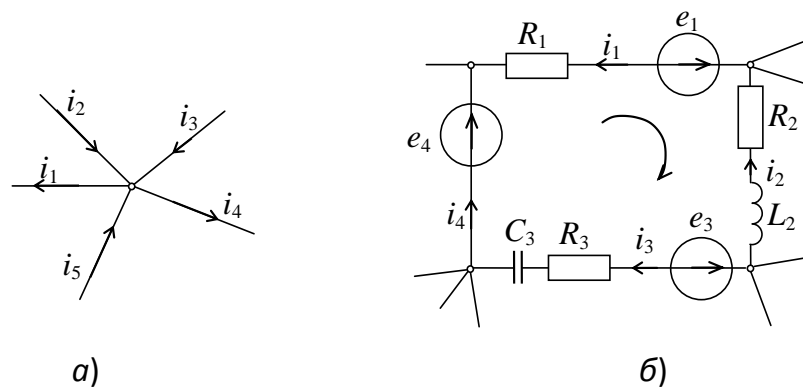


Рис. 2.10. Фрагменты схем электрической цепи синусоидального тока (к иллюстрации записи выражений для первого (а) и второго (б) законов Кирхгофа)

Второй закон Кирхгофа является следствием того факта, что после обхода контура и возвращения в исходную точку должен получиться тот же потенциал. Это положение справедливо для любого момента времени. Отсюда следует формулировка второго закона Кирхгофа для мгновенных значений: алгебраическая сумма напряжений  $u_k$  на резистивных, емкостных и индуктивных элементах контура в данный момент времени равна алгебраической сумме ЭДС  $e_k$ , в том же контуре, в тот же момент времени:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^m e_k, \quad (2.24)$$

где  $n$  – суммарное число резистивных, емкостных и индуктивных элементов в контуре;  $m$  – число ЭДС в контуре.

Контур обходят в одном произвольно выбранном направлении, алгебраически суммируя напряжения и ЭДС.

Применительно к контуру, приведенному на рис. 2.10, б, по второму закону Кирхгофа для мгновенных величин

$$-u_{R_1} - u_{R_2} - u_{L_2} + u_{R_3} + u_{C_3} = e_1 - e_3 + e_4,$$

$$\text{где } u_{R_i} = R_i i; u_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt}; u_{C_3} = \frac{1}{C_3} \int i_3 dt^*. \quad (2.25)$$

Как показано в параграфе 2.1.2, синусоидальные функции времени можно представить в комплексной форме. Выполнив это преобразование для мгновенных значений токов, напряжений и ЭДС в (2.23) и в (2.24), получим законы Кирхгофа для цепей синусоидального тока в комплексной форме.

\* Выражение для  $u_c$  получено в результате интегрирования соотношения (2.7).



*Первый закон Кирхгофа:* алгебраическая сумма комплексных токов в узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0. \quad (2.26)$$

*Второй закон Кирхгофа:* алгебраическая сумма комплексных напряжений в контуре равна алгебраической сумме комплексных ЭДС в том же контуре:

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \sum_{k=1}^m \underline{E}_k. \quad (2.27)$$

Для узла на рис. 2.10, *а* по первому закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 0.$$

Для контура на рис. 2.10, *б* по второму закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$-\underline{U}_{R_1} - \underline{U}_{R_2} - \underline{U}_{L_2} + \underline{U}_{R_3} + \underline{U}_{C_3} = \underline{E}_1 - \underline{E}_3 + \underline{E}_4,$$

где  $\underline{U}_R, \underline{U}_L, \underline{U}_C$  – комплексные действующие значения напряжений на  $R, L, C$ -элементах ( $\underline{U}_R = \underline{I}R, \underline{U}_L = j\omega LI, \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$ );  $\underline{E}_1, \underline{E}_3, \underline{E}_4$  – комплексные действующие значения ЭДС:  $\underline{E} = Ee^{j\psi_e}$ .

### **2.1.6. Электрическая цепь синусоидального тока с резистивным элементом**

Если к резистивному элементу ( $R$ -элементу), представленному на рис. 2.11, *а* приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то по закону Ома для мгновенных значений

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{R}.$$

Из этого выражения следует, что ток изменяется также по синусоидальному закону  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , где  $U_m/R$  – амплитуда тока. Разделив левую и правую части последнего равенства на  $\sqrt{2}$ , получаем соотношение для действующих значений:

$$I = U/R. \quad (2.28)$$

Начальная фаза  $\psi_u = \psi_i$ , откуда следует, что сдвиг фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$ , т. е. на участке с резистивным  $R$  элементом напряжение и ток совпадают по фазе.

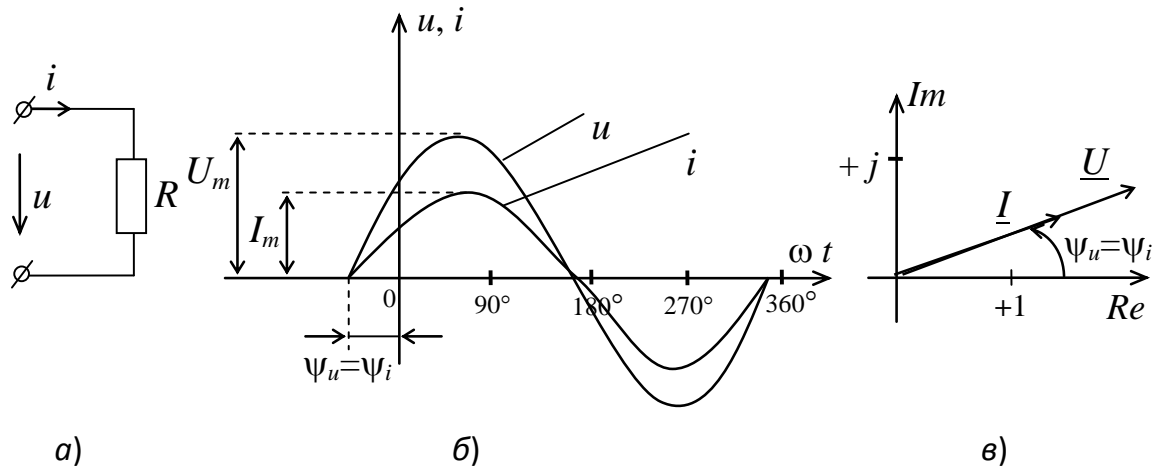


Рис. 2.11. Резистор в цепи синусоидального тока:

*a* – схема включения; *б* – временные диаграммы; *в* – векторная диаграмма

График мгновенных значений и векторная диаграмма приведены на рис. 2.11, *б*, *в*. Заменяя мгновенные значения  $u$  и  $i$  комплексными выражениями в показательной форме

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} \quad \text{и} \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i},$$

и разделив  $\underline{U}$  на  $\underline{I}$ , получим

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = R e^{j0} = R.$$

Отсюда следует закон Ома в комплексной форме для участка цепи с резистивным сопротивлением  $R$ :

$$\underline{I} = \underline{U} / R \quad (\underline{U} = R \underline{I}, \quad R = \underline{U} / \underline{I}). \quad (2.29)$$

### 2.1.7. Электрическая цепь синусоидального тока с индуктивным элементом

Если к индуктивному элементу ( $L$ -элементу) на рис. 2.12, *a* подключить источник синусоидального тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , то потокосцепление  $\Psi = Li = LI_m \sin(\omega t + \psi_i) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_\Psi)$ , где  $\Psi_m = LI_m$ ,  $\psi_\Psi = \psi_i$  и, следовательно, ток и потокосцепление совпадают по фазе.

Изменяющееся потокосцепление наводит в катушке ЭДС самоиндукции  $e_L = -d\Psi/dt = -L di/dt = -L\omega I_m \cos(\omega t + \psi_i)$ , или  $e_L = E_{Lm} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right)$ , где  $E_{Lm} = \omega L I_m$ , т. е. ЭДС также синусоидальна и отстает на  $\pi/2$  от тока.

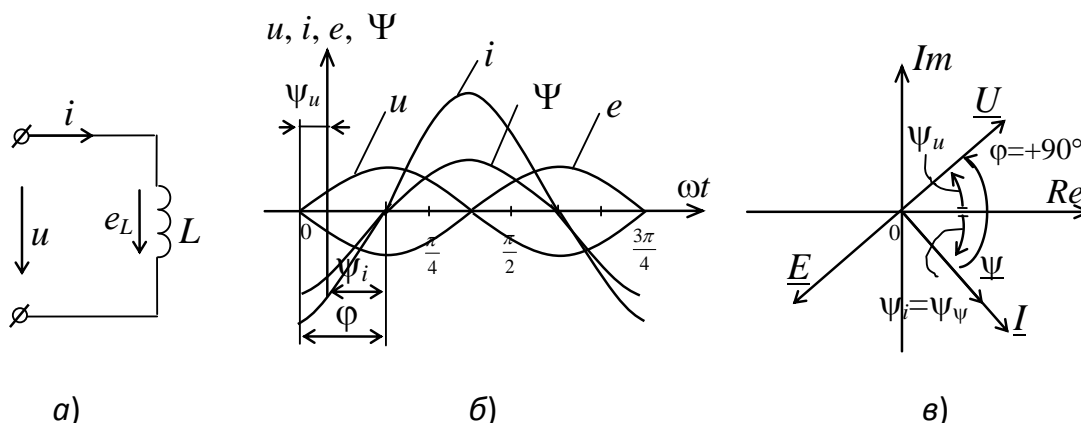


Рис. 2.12. Индуктивность в цепи синусоидального тока: а – схема включения; б – временные диаграммы; в – векторная диаграмма

### Напряжение на индуктивном элементе

$$u = -e_L = L di/dt = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right), \text{ или}$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

где  $U_m = \omega L I_m$ , т. е. напряжение на индуктивном элементе синусоидально и опережает ток по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ , т. е.  $\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}$ .

Разделив  $U_m$  и  $I_m$  на  $\sqrt{2}$ , получим связь между действующими значениями напряжения  $U$ , и тока  $I$  для индуктивного элемента

$$I = \frac{U}{\omega L}, \quad (U = \omega L I, \quad \omega L = \frac{U}{I}). \quad (2.30)$$

Величину  $\omega L$  в (2.30), имеющую размерность Ом ( $[\omega L] = \frac{1}{C} \cdot \frac{BC}{A} =$  Ом), обозначают  $X_L$  и называют **индуктивным сопротивлением**.

График мгновенных значений  $i, \Psi, e, u$  и векторная диаграмма приведены на рис. 2.12, б, в.

Заменим мгновенные значения напряжения  $u$  и тока  $i$  их комплексными выражениями в показательной форме и разделим комплексное напряжение на комплексный ток:

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} \text{ и } \underline{I} = I e^{j\psi_i},$$

$$\underline{U} / \underline{I} = X_L I e^{j(\psi_i + \pi/2)} / I e^{j\psi_i} = X_L e^{j\pi/2} = j X_L.$$

Следовательно, закон Ома в комплексной форме для индуктивного элемента имеет вид

$$\underline{I} = \underline{U} / j X_L, (\underline{U} = j X_L \underline{I}, j X_L = \underline{U} / \underline{I}). \quad (2.31)$$

### 2.1.8. Электрическая цепь синусоидального тока с емкостным элементом

Если к емкостному элементу на рис. 2.13, а приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то ток заряда-разряда емкости

$$i = C(d u / d t) = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + \pi/2).$$

Таким образом, ток на участке цепи с емкостным элементом при синусоидальном напряжении также синусоидальный:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Амплитуда тока  $I_m = \omega C U_m$ , а его действующее значение  $I = \omega C U$ . Множитель  $\omega C$  имеет размерность проводимости:

$$([\omega C] = (1/C) \text{ Кл/В} = (1/C)(AC)/B = A/B = \text{См}).$$

Величину, обратную  $\omega C$ , обозначают  $X_C = 1/\omega C$  и называют **емкостным сопротивлением**. Физически это означает, что ток заряда-разряда конденсатора не может быть неограниченно большим.

Начальная фаза тока  $\psi_i = \psi_u + \pi/2$  и, следовательно, разность фаз между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ.$$

Графики мгновенных значений  $u$ ,  $i$  и векторная диаграмма для комплексных величин напряжения и тока приведены на рис. 2.13, б, в.

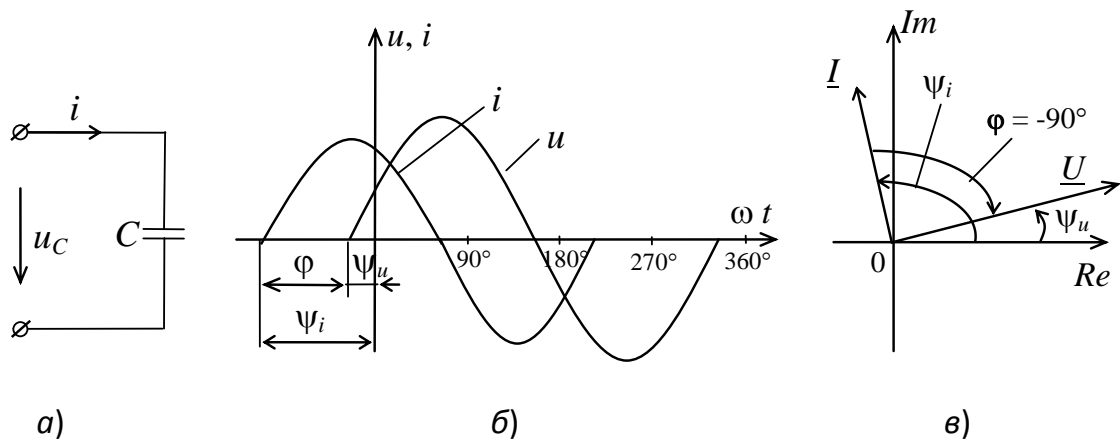


Рис. 2.13. Емкость в цепи синусоидального тока:

а – схема включения; б – временные диаграммы; в – векторная диаграмма

Заменим мгновенные значения напряжения и тока их комплексными выражениями в показательной форме и разделим напряжение  $\underline{U}$  на ток  $\underline{I}$ :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = X_C e^{-j90^\circ} = -j X_C.$$

Следовательно, закон Ома в комплексной форме для емкостного элемента имеет вид

$$\underline{I} = \underline{U} / (-j X_C), \quad (\underline{U} = -j X_C \underline{I}, \quad -j X_C = \underline{U} / \underline{I}). \quad (2.32)$$

### 2.1.9. Электрическая цепь синусоидального тока при последовательном соединении RLC-элементов

Если к участку с последовательным соединением RLC-элементов на рис. 2.14, а приложено синусоидального напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то и ток в цепи будет синусоидальный  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

На каждом из элементов будет напряжение  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$ , причем по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Заменив мгновенные значения напряжений их комплексными выражениями, получим

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C. \quad (2.33)$$

Поскольку ранее было получено, что

$$\underline{U}_R = R \underline{I}, \quad \underline{U}_L = j X_L \underline{I}, \quad \underline{U}_C = -j X_C \underline{I},$$

то выражение (2.33) можно переписать в виде

$$U = RI + jX_L I - jX_C I. \quad (2.34)$$

Решая (2.34) относительно  $\underline{I}$ , получим закон Ома в комплексной форме для цепи (рис. 2.14, а):

$$\underline{I} = \underline{U} / [R + j(X_L - X_C)]. \quad (2.35)$$

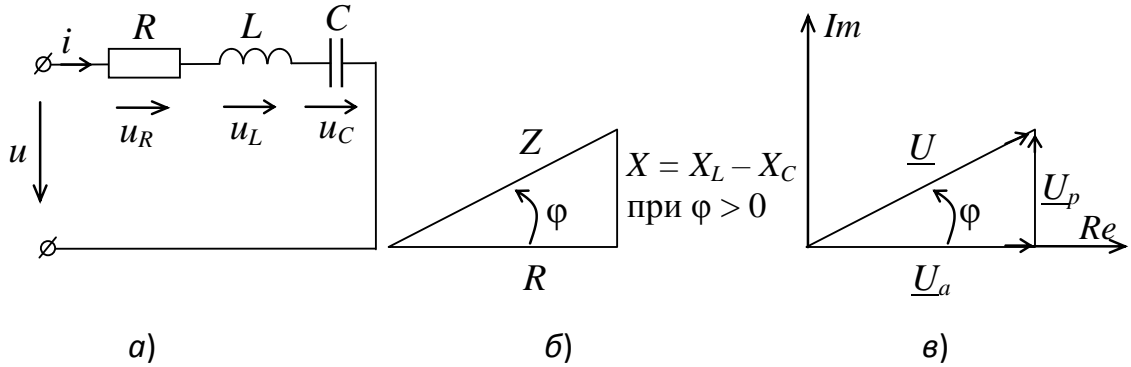


Рис. 2.14. Последовательное соединение RLC-элементов в цепи синусоидального тока:  
а – схема цепи; б – треугольник сопротивлений;  
в – треугольник напряжений

Знаменатель в (2.35) обозначают через

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad (2.36)$$

и называют **комплексным сопротивлением**, а  $X_L - X_C = X$  называют **реактивным сопротивлением**.

Представим  $\underline{Z}$  в показательной форме:

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}, \quad (2.37)$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2.38)$$

– модуль комплексного сопротивления, который называют **полным сопротивлением**;

$$\varphi = \text{arctg}((X_L - X_C)/R) \quad (2.39)$$

– аргумент комплексного сопротивления.

Выразив  $\underline{Z}$  через  $\underline{U}$  и  $\underline{I}$  из закона Ома (2.35) и представив  $\underline{U}$  и  $\underline{I}$  в показательной форме, получим

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)}. \quad (2.40)$$

Из (2.37) и (2.40) получим

$$Z = U / I, \quad (2.41)$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (2.42)$$

Из (2.35)–(2.42) можно сделать следующие выводы:

1. Действующее (или амплитудное) значение тока в цепи с последовательным соединением  $RLC$ -элементов прямо пропорционально действующему (или амплитудному) значению напряжения

и обратно пропорционально полному сопротивлению цепи  $Z$  (2.41).

2. Угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током равен аргументу комплексного сопротивления (2.37).

Знак угла  $\varphi$  определяется знаком реактивного сопротивления  $X$  (2.39). Если  $X_L > X_C$ , то сопротивление цепи на рис. 2.14, *a* имеет активно-индуктивный характер, т. е. ток по фазе отстает от напряжения на угол  $0 < \varphi < 90^\circ$ .

Если  $X_L < X_C$ , то сопротивление цепи на рис. 2.14, *a* имеет активно-емкостный характер, т. е. ток по фазе опережает напряжение на входе цепи на угол  $0 > \varphi > -90^\circ$ .

Если  $X_L = X_C$ , то сопротивление цепи на рис. 2.14, *a* имеет чисто активный характер, а разность фаз между током в цепи и напряжением на входе цепи  $\varphi = 0$ .

Режим электрической цепи с последовательным соединением  $RLC$ -элементов, при котором разность фаз  $\varphi$  между током в цепи и напряжением на входе цепи равна нулю, называют **резонансом напряжений**.

Для удобства запоминания формул (2.38) и (2.39) строят треугольник сопротивлений (рис. 2.14, *б*), из которого эти формулы легко получаются.

Треугольнику сопротивлений (рис. 2.14, *б*) можно сопоставить треугольник напряжений (рис. 2.14, *в*), катеты которого называют активной  $U_a$  и реактивной  $U_p$  составляющими общего напряжения  $U$  на входе цепи. При этом

$$U_a = I R, \quad U_p = I X. \quad (2.43)$$

Из рис. 2.14, *в* следует, что модуль общего напряжения  $U$  и модуль напряжения на отдельных элементах схемы связаны соотношением

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}, \quad (2.44)$$

а угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением на входе цепи и током в цепи

$$\varphi = \text{arctg}((U_L - U_C)/U_R). \quad (2.45)$$

На рис. 2.15 показаны векторные диаграммы цепи (рис. 2.14, а) для трех случаев:  $X_L > X_C$ ,  $X_L < X_C$ ,  $X_L = X_C$ .

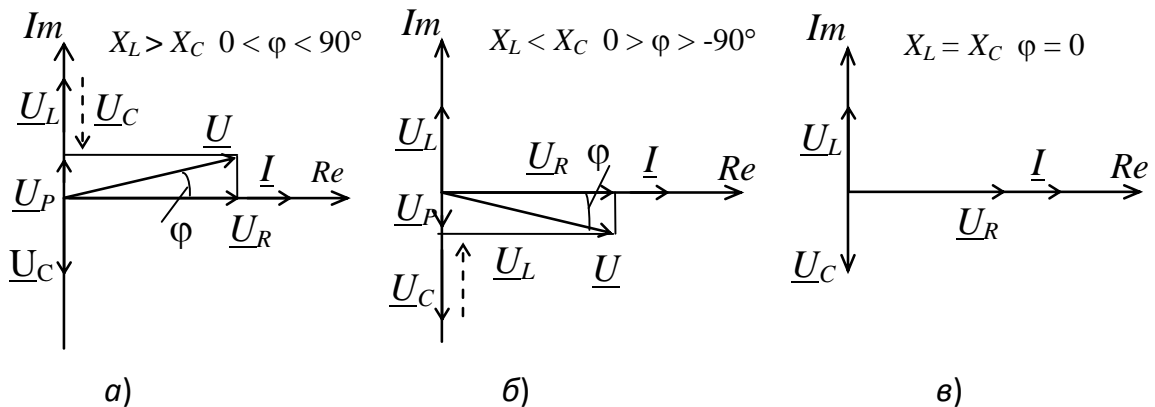


Рис. 2.15. Векторные диаграммы цепи синусоидального тока с последовательным соединением  $RLC$ -элементов:  
 а –  $X_L > X_C$ ; б –  $X_L < X_C$ ; в –  $X_L = X_C$

Диаграммы строятся в соответствии со вторым законом Кирхгофа (2.33). Начальная фаза тока для этой цепи принята равной нулю  $\psi_i = 0$ .

Резонанс напряжений цепи на рис. 2.14, а можно получить тремя способами:

- изменением частоты  $\omega$  напряжения питания при неизменных параметрах  $RLC$ -элементов;
- изменением индуктивности  $L$  катушки индуктивности при фиксированной частоте  $\omega$  и  $C$ ;
- изменением емкости  $C$  конденсатора при фиксированных  $\omega$  и  $L$ .

При  $\varphi = 0$  из (2.39) следует, что  $X_L = X_C$ . Так как  $X_L = \omega L$  и  $X_C = 1/\omega C$ , то при резонансе

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (2.46)$$

Сопротивления реактивных элементов на резонансной частоте  $\omega_0$  равны между собой

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.47)$$

и называются **характеристическим сопротивлением последовательной электрической цепи**.

Отношение характеристического сопротивления  $\rho$  к активному сопротивлению  $R$  последовательной цепи называется **добротностью**:



$$Q = \rho / R. \quad (2.48)$$

Рассмотрим характерные особенности режима резонанса напряжений:

1. Так как  $\varphi = 0$ , то  $\cos \varphi = 1$  и суммарное сопротивление цепи рис. 2.14, а активное, т. е. полное сопротивление при резонансе равно активному сопротивлению

$$Z_{\text{рез}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R, \quad (2.49)$$

и минимально при заданном  $R$ .

2. Ток  $I_{\text{рез}} = U / Z_{\text{рез}} = U / R$  максимален, что позволяет обнаружить режим резонанса при изменении  $\omega$ ,  $L$  или  $C$  и что может служить причиной перегрева элементов цепи и вывода их из строя.

3. Напряжения на отдельных участках цепи на рис. 2.14, а при резонансе равны

$$\left. \begin{aligned} U_R &= R I_{\text{рез}} = U; \\ U_L &= X_L I_{\text{рез}} = \omega_0 L \frac{U}{R} = \frac{\rho}{R} U = Q U; \\ U_C &= X_C I_{\text{рез}} = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{U}{R} = \frac{\rho}{R} U = Q U. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Если  $X_C = X_L > R$ , то  $U_L = U_C = U Q > U_R$ , т. е. напряжение на участках с реактивными элементами в  $Q$  раз больше, чем напряжение питания. Это свойство увеличения напряжения является важнейшей особенностью резонанса напряжения и широко используется в технике.

Вместе с тем значительное повышение напряжений на реактивных элементах при резонансе может привести к пробое изоляции и опасно для обслуживающего персонала.

Зависимости параметров цепи на рис. 2.14, а от частоты  $\omega$  (рис. 2.16, а, б) называют **частотными характеристиками**.

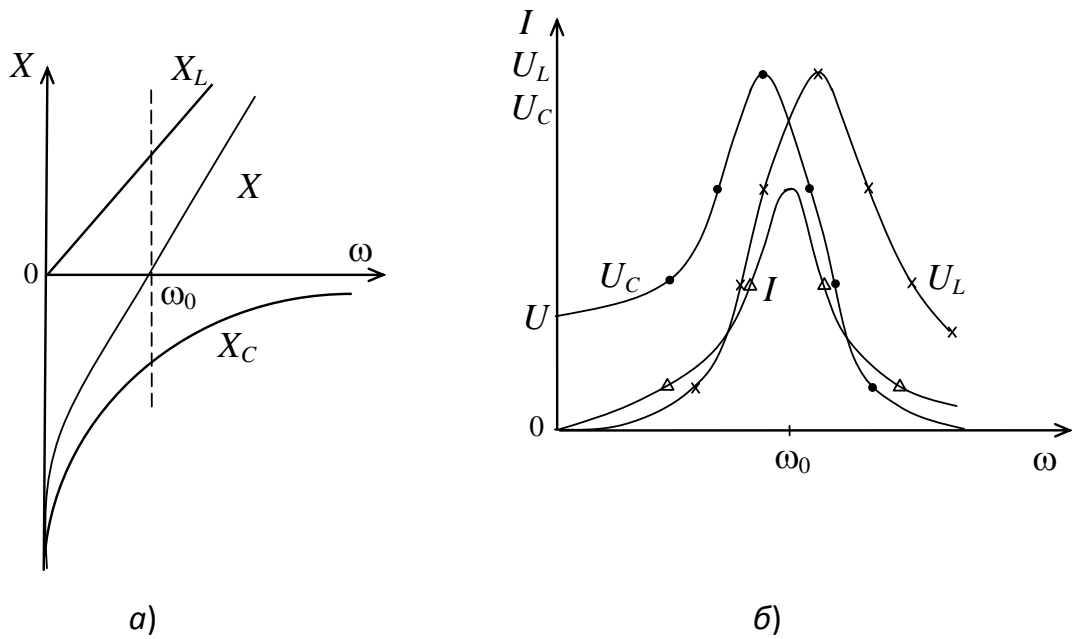


Рис. 2.16. Частотные характеристики цепи синусоидального тока с последовательным соединением  $RLC$ -элементов

Частотные характеристики основных величин цепи  $U_L$ ,  $U_C$ ,  $I$  на рис. 2.16, б называют резонансными кривыми.

### 2.1.10. Электрическая цепь синусоидального тока при параллельном соединении элементов

Рассмотрим электрическую цепь на рис. 2.17, а, состоящую из двух параллельных ветвей. Пусть эта электрическая цепь присоединена к источнику синусоидального напряжения

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Определим ток  $i(t)$  в неразветвленной части цепи через заданные параметры  $R_1$ ,  $L$ ,  $R_2$ ,  $C$ .

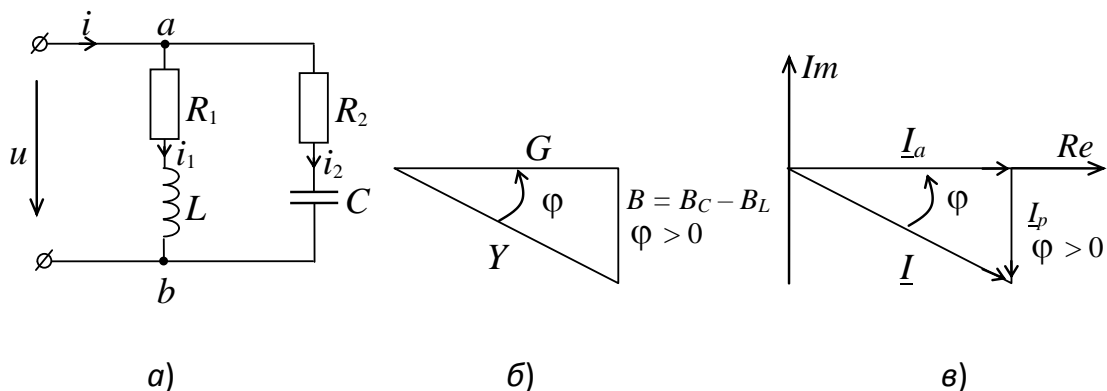


Рис. 2.17. Параллельное соединение  $RLC$ -элементов  
в цепи синусоидального тока:  
 $a$  – схема цепи;  $b$  – треугольник проводимостей;  $в$  – треугольник токов

Для узла « $a$ » первый закон Кирхгофа для мгновенных токов имеет вид

$$i = i_1 + i_2,$$

а для комплексных токов

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2. \quad (2.51)$$

Выразим слагаемые (2.51) через напряжение  $\underline{U}$  на входе цепи по закону Ома в комплексной форме:

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}; \quad \underline{I}_1 = \underline{U} / \underline{Z}_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{U} / \underline{Z}_2, \quad (2.52)$$

где

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L; \quad \underline{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C}; \quad \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (2.53)$$

– комплексные сопротивления отдельных ветвей и всей цепи.

Подставив (2.52) в (2.51), получим

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{U} \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) = \underline{U} \frac{1}{\underline{Z}}. \quad (2.54)$$

Величину  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ , обратную комплексному сопротивлению  $\underline{Z}$ , называют **комплексной проводимостью**. Действительную часть комплексной проводимости обозначают буквой  $G$  и называют **активной проводимостью**. Мнимую часть комплексной проводимости обозначают буквой  $B$  и называют **реактивной проводимостью**.

Так как  $\underline{Z} = R + jX$ , то  $\underline{Y} = 1/\underline{Z} = 1/(R + jX) = (R - jX)/Z^2 = R/Z^2 - jX/Z^2$  и, следовательно,

$$G = R/Z^2, \quad B = X/Z^2, \quad Y = G - jB. \quad (2.55)$$

С учетом введенной комплексной проводимости выражение для тока  $I$  в неразветвленной части цепи на рис. 2.17,  $a$  можно записать в виде

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = \underline{U} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) = \underline{U} \underline{Y}, \quad (2.56)$$

где  $\underline{Y}$  – эквивалентная комплексная проводимость всей цепи:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2. \quad (2.57)$$

Выражение (2.56) представляет собой запись закона Ома через комплексную проводимость. Записав  $\underline{Z}$  в показательной форме, можно представить комплексную проводимость в виде

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y e^{-j\varphi}, \quad (2.58)$$

где  $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$  – модуль или полная проводимость цепи;  $\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}$  – аргумент комплексной проводимости.

При этом учтено, что

$$B = B_L - B_C = \frac{X_L}{Z_1^2} - \frac{X_C}{Z_2^2},$$

где  $B_L = \frac{X_L}{Z_1^2}$  – индуктивная проводимость;  $B_C = \frac{X_C}{Z_2^2}$  – емкостная

проводимость.  $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}$  – полное сопротивление первой ветви;

$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$  – полное сопротивление второй ветви.

Поскольку из (2.56) следует, что

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\psi i}}{U e^{j\psi u}} = \frac{I}{U} e^{-j(\psi u - \psi i)} = Y e^{-j\varphi},$$

то очевидно, что  $Y = I/U$  – полная проводимость, а аргумент комплексной проводимости равен углу сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током с обратным знаком:  $\arg \underline{Y} = -\varphi$ .

Приведенные выше формулы легко получаются из треугольника проводимостей (рис. 2.17, б).

Из (2.54) следует, что

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \quad \text{или} \quad \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (2.59)$$

Формула (2.59) аналогична формуле (1.22) для цепи постоянного тока.

Из (2.57) следует, что

$$\underline{Y} = G - jB = \frac{R_1 - j\omega L}{Z_1^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C}}{Z_2^2} = \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2} - j \left( \frac{\omega L}{Z_1^2} - \frac{1}{Z_2^2} \right)$$

или  $G = G_1 + G_2$ ,  $B = B_L - B_C$ .

Следовательно,

$$Y = \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_L - B_C)^2} \quad (2.60)$$

– полная проводимость цепи (рис. 2.17, а);

$$-\varphi = -\arctg\left(\frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2}\right) \quad (2.61)$$

– аргумент полной проводимости.

Треугольнику проводимостей на рис. 2.17, б можно сопоставить треугольник токов на рис. 2.17, в.

Из рис. 2.17 следует, что

$$I_a = I \cos \varphi, \quad I_p = I \sin \varphi.$$

Так как  $I = U / Z$ ;  $\cos \varphi = R / Z$ ;  $\sin \varphi = X / Z$ , то

$$I_a = \frac{U}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = U \frac{R}{Z^2} = U G; \quad I_p = \frac{U}{Z} \cdot \frac{X}{Z} = U \frac{X}{Z^2} = U B. \quad (2.62)$$

Векторные диаграммы токов и напряжений для цепи на рис. 2.17, а приведены на рис. 2.18. Они строятся на основе первого закона Кирхгофа. Начальная фаза комплексного напряжения на входе цепи принимается равной нулю.

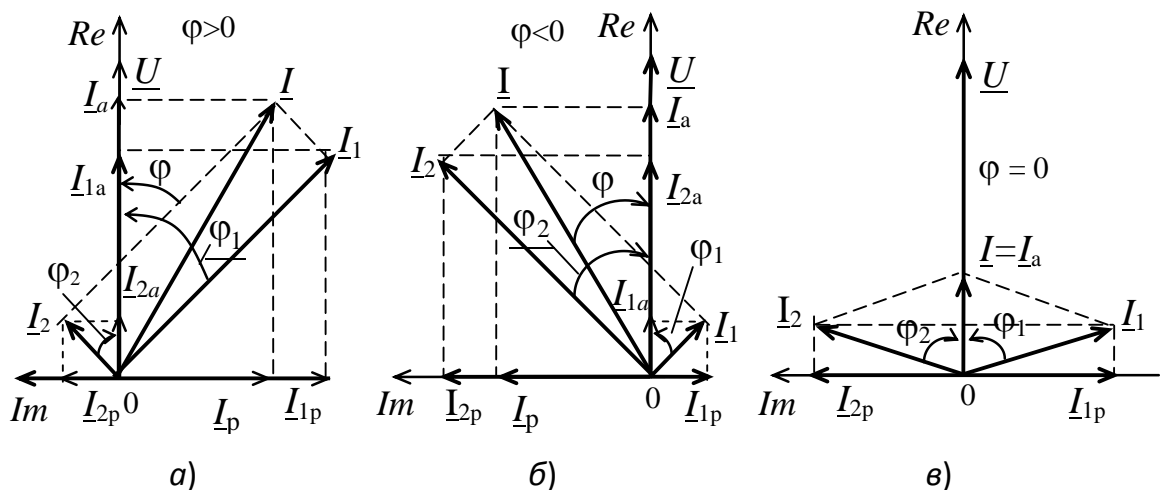


Рис. 2.18. Векторные диаграммы цепи синусоидального тока с параллельным соединением  $RLC$ -элементов:

$$a - I_{1p} > I_{2p}; \quad б - I_{1p} < I_{2p}; \quad в - I_{1p} = I_{2p}$$

Так как сопротивление первой ветви на рис. 2.17, *а* активно-индуктивное, то ток  $\underline{I}_1$  отстает от напряжения  $\underline{U}$  на угол  $\varphi_1 = \arctg(X_L / R_1)$ . Ток  $\underline{I}_2$  второй ветви опережает напряжение  $\underline{U}$  на угол  $\varphi_2 = \arctg(X_C / R_2)$ . Вектор  $\underline{I}$  в неразветвленном участке цепи определяется по первому закону Кирхгофа либо по правилу параллелограмма.

Рисунку 2.18, *а* отвечает случай, когда  $I_{1p} > I_{2p}$ , поэтому вектор  $\underline{I}$  отстает от  $\underline{U}$  на угол  $\varphi$ . Для этого случая говорят, что цепь имеет индуктивный характер.

Рисунку 2.18, *б* отвечает случай, когда  $I_{1p} < I_{2p}$ , когда цепь имеет емкостный характер, а ток  $\underline{I}$  опережает по фазе напряжение  $\underline{U}$ .

Из рис. 2.18, *в* следует, что возможен случай, когда между током  $\underline{I}$  и напряжением  $\underline{U}$  нет сдвига по фазе ( $\varphi = 0$ ).

Режим работы электрической цепи с параллельным соединением  $RLC$ -элементов, при котором ток  $\underline{I}$  в неразветвленной части цепи совпадает по фазе с напряжением  $\underline{U}$  на входе цепи, называют **резонансом токов**.

Резонансу токов отвечает равенство модулей реактивных составляющих токов в параллельных ветвях:

$$I_{1p} = I_{2p}. \quad (2.63)$$

Так как  $I_{1p} = B_L U$  и  $I_{2p} = B_C U$ , то условие резонанса токов можно записать в виде

$$B_L = B_C, \quad (2.64)$$

т. е. в режиме резонанса токов равны модули реактивных проводимостей ветвей электрической цепи, содержащие параллельно включенные индуктивные и емкостные элементы.

К соотношению (2.64) можно прийти из определения резонанса токов ( $\varphi = 0$ ) с учетом (2.61):

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2} = 0 \quad \text{или} \quad B_L = B_C.$$

Так как  $B_L = \frac{\omega'_0 L}{R_1^2 + (\omega'_0 L)^2}$  и  $B_C = \frac{1}{\omega'_0 C} \frac{1}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega'_0 C}\right)^2}$ , то для определения

резонансной частоты  $\omega'_0$  получаем соотношение

$$\frac{\omega'_0 L}{R_1^2 + (\omega'_0 L)^2} = \frac{1}{\omega'_0 C} \frac{1}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega'_0 C}\right)^2},$$

или

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}, \quad (2.65)$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – характеристическое сопротивление.

Из (2.65) следует ряд выводов:

1. Резонансная частота  $\omega'_0$  при резонансе токов зависит не только от параметров реактивных элементов  $L$  и  $C$ , но и от активных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ .

2. Резонанс токов возможен, если сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  или оба больше  $\rho$ , или оба меньше  $\rho$ . В данном случае подкоренное выражение в (2.65) положительное, в противном случае – резонанс токов невозможен ( $\omega'_0$  – мнимая величина).

3. Если  $R_1 = R_2 = \rho$ , то резонансная частота  $\omega'_0$  имеет неопределенное значение ( $\omega'_0 = 0/0$ ), что означает существование резонанса при любой частоте.

4. При  $R_1$  и  $R_2 \ll \rho$ ,  $\omega'_0 \approx \omega_0$ , т. е. резонансная частота при резонансе токов рассчитывается также, как и при резонансе напряжений.

Рассмотрим характерные особенности режима резонанса токов:

1. Так как  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  и общее сопротивление цепи активное, то полная проводимость цепи равна активной проводимости и минимальна

$$Y = \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_L - B_C)^2} = G_1 + G_2 = G_{\text{экв}}.$$

Сопротивление цепи при этом активное и максимальное.

2. Ток в неразветвленной части цепи имеет минимальное значение  $I = UG_{\text{экв}}$ , что позволяет обнаруживать резонанс токов в цепи при изменении  $\omega$  или  $L$  и  $C$ .

3. Активные и реактивные составляющие токов равны:  $I_{1a} = G_1U$ ;  $I_{2a} = G_2U$ ;  $I_{1p} = B_LU$ ;  $I_{2p} = B_CU$ ;  $I_a = I_{1a} + I_{2a}$ . Так как  $B_L = B_C$ , то  $I_{1p} = I_{2p}$  и, следовательно,  $I_p = 0$ . Ток в неразветвленной части цепи равен активной составляющей тока:

$$I = \sqrt{I_a^2 + (I_{1p} - I_{2p})^2} = I_a.$$

Величина тока в ветвях  $I_1 = \sqrt{G_1^2 + B_L^2}U$ ;  $I_2 = \sqrt{G_2^2 + B_C^2}U$ . Если  $B_L \gg G_1$  и  $B_C \gg G_2$  (т. е.  $X_L \gg R_1$  и  $X_C \gg R_2$ ), то  $I_{1p} \gg I_{1a}$ ,  $I_{2p} \gg I_{2a}$  и  $I_1 \gg I$ ,  $I_2 \gg I$ , т. е. токи в ветвях значительно превышают ток в неразветвленной части цепи.

При  $R_1 = R_2 = R \ll X_L = X_C$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{I_2}{I} = \frac{B_L U}{G_{\text{экв}} U} = \frac{\frac{X_L}{(R_1^2 + X_L^2)}}{\frac{R_1}{(R_1^2 + X_L^2)} + \frac{R_2}{(R_2^2 + X_C^2)}} \approx \frac{\frac{1}{X_L}}{\frac{R_1}{X_L^2} + \frac{R_2}{X_C^2}} = \frac{X_L}{R_1 + R_2} = \frac{\rho}{R} = Q.$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Запишите выражения для индуктивного и емкостного сопротивлений.

2. Запишите выражения для индуктивного и емкостного сопротивлений в комплексной форме.

3. Запишите формулу для комплексного сопротивления участка цепи с последовательным соединением  $RLC$ -элементов в алгебраической и показательной формах.

4. Запишите выражение закона Ома в комплексной форме для участка цепи с сопротивлением  $\underline{Z}$ , и в обобщенной форме (с учетом заданной разности потенциалов  $\underline{\varphi}_a - \underline{\varphi}_b$  на концах участка).

5. Поясните порядок построения векторной диаграммы при последовательном соединении  $RLC$ -элементов.



6. Как определить разность фаз между напряжением  $\underline{U}_{ab}$  и током  $\underline{I}_{ab}$  выделенной ветви  $ab$  разветвленной цепи синусоидального тока?

7. В цепь синусоидального тока частотой  $f = 50$  Гц, напряжением  $U = 220$  В последовательно включены катушка с активным сопротивлением  $R = 24$  Ом и индуктивностью  $L = 76,43$  мГн и конденсатор емкостью  $C = 398,1$  мкФ. Определите ток в цепи  $I$ , угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током, напряжение на катушке  $\underline{U}_e$  и на конденсаторе  $\underline{U}_c$ . Постройте векторную диаграмму.

8. В цепь синусоидального тока частотой  $f = 50$  Гц последовательно включены резистор  $R$  и конденсатор  $C$ . В цепь включены приборы, измеряющие действующие значения. Вольтметр показывает напряжение  $U = 380$  В на входе цепи, амперметр показывает ток  $I = 2$  А в цепи, а фазометр – измеренное значение разности фаз между  $U$  и  $I$ ,  $\varphi = -45^\circ$ . Определите параметры  $R$  и  $C$ . Начертите векторную диаграмму.

9. Запишите формулу для комплексной проводимости и поясните, что понимают под активной и реактивной проводимостями.

10. Объясните, как найти угол сдвига фаз между напряжением и током в ветви, зная ее комплексную проводимость.

11. Запишите закон Ома в комплексной форме через комплексную проводимость участка цепи.

12. Запишите формулу для расчета комплексного сопротивления двух параллельно соединенных ветвей с комплексными сопротивлениями  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ .

13. Запишите выражения для комплексного сопротивления  $\underline{Z}_{\text{экв}}$  и комплексной проводимости  $\underline{Y}_{\text{экв}}$  электрической цепи (рис. 2.19, а).

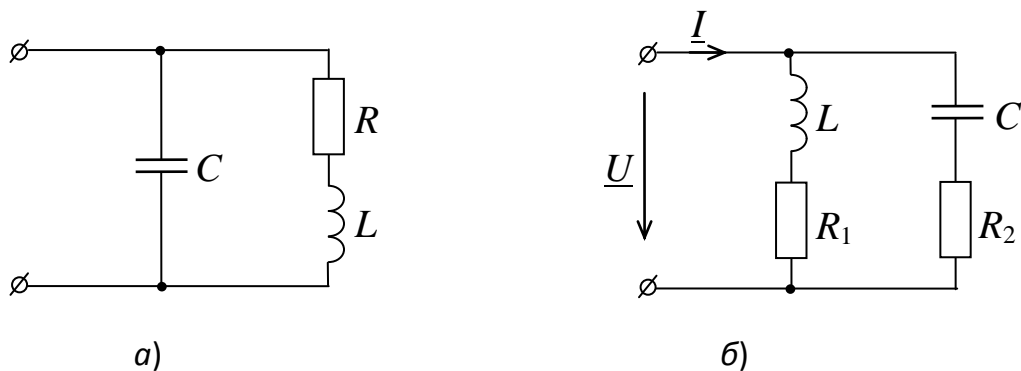


Рис. 2.19

14. Для цепи синусоидального тока на рис. 2.19, б известны параметры  $R_1$ ,  $L$ ,  $R_2$ ,  $C$  и напряжение  $U_C$  на конденсаторе. Составьте формулы для расчета тока  $I$  и угла сдвига фаз  $\varphi$  между  $U$  и  $I$ .

15. Объясните, в каких электрических цепях, и при каких условиях возможен резонанс напряжения (резонанс тока).

16. Объясните, почему при резонансе напряжений ток в цепи максимален.

17. Напряжение на входе цепи на рис 2.14, а  $U = 220$  В. Катушка имеет активное сопротивление  $R = 22$  Ом и индуктивность  $L = 100$  мГн. Определите емкость  $C$ , при которой в цепи будет иметь место резонанс напряжений, и величину  $U_C$  при частотах  $f_1 = 50$  Гц,  $f_2 = 1000$  Гц.

18. Начертите векторную диаграмму при резонансе токов в параллельном контуре, если в одну ветвь включена катушка индуктивности с параметрами  $L$  и  $R$ , а в другую – конденсатор емкостью  $C$ .

### 2.1.11. Мощности в цепи синусоидального тока

**Мгновенная мощность.** Под *мгновенной мощностью* понимается произведение мгновенных значений напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$ , т. е.

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (2.66)$$

Пусть  $i = I_m \sin(\omega t)$  и  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , тогда разность фаз  $\varphi$  между напряжением и током  $\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u$  и выражение (2.66) можно записать в виде

$$p = U_m I_m \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} (\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)),$$

или

$$p = U I (\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)). \quad (2.67)$$

График мгновенного значения  $u(t)$ ,  $i(t)$  и  $p(t)$  приведен на рис. 2.20.

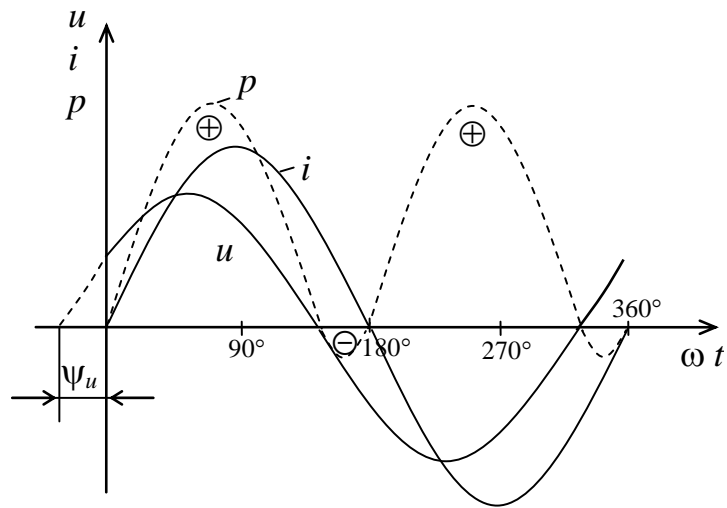


Рис. 2.20. Графики мгновенных величин  $p(t)$ ,  $u(t)$  и  $i(t)$

Из (2.67) следует, что мгновенная мощность состоит из постоянной составляющей  $UI \cos \varphi$  (независима от времени  $t$ ) и переменной составляющей  $UI \cos(2\omega t + \varphi)$ , изменяющейся по косинусоидальному закону с удвоенной частотой  $2\omega$ .

На рис. 2.20 кривая  $p(t)$  несимметрична относительно оси абсцисс (смещена вверх), что обусловлено наличием постоянной составляющей мощности.

Мгновенная мощность положительна ( $p > 0$ ), когда  $u$  и  $i$  имеют одинаковые знаки, и отрицательна ( $p < 0$ ), когда знаки разные. Положительная мощность означает, что в данный участок электрической цепи поступает энергия, а отрицательная – что участок отдает энергию.

Если участок содержит активное сопротивление  $R$ , то среднее значение мгновенной мощности – положительная величина, т. к. на участке есть необратимые преобразования энергии. В предельных случаях (участок без потерь) сдвиг фаз между напряжением и током  $\varphi$  равен  $+90$  или  $-90$  и среднее значение мгновенной мощности равно 0.

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 2.21) с последовательным соединением  $RLC$ -элементов. Мгновенная мощность цепи

$$p = ui = u_R i + u_L i + u_C i = p_R + p_L + p_C.$$

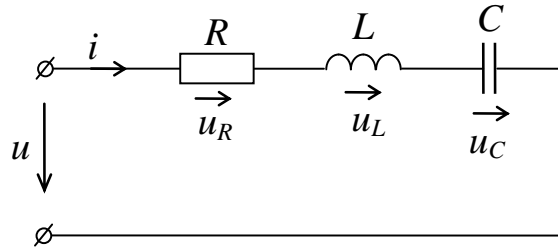


Рис. 2.21. Цепь синусоидального тока с последовательным соединением  $RLC$ -элементов (к определению мгновенных мощностей  $RLC$ -элементов)

Начальную фазу тока примем равной 0 ( $\psi_i = 0$ ). При этом  $\psi_u = \varphi$ . Мгновенные напряжения на отдельных элементах цепи равны  $u_R = I_m R \sin(\omega t)$ ;  $u_L = I_m \omega L \sin(\omega t + 90^\circ)$ ;  $u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - 90^\circ)$ . Тогда

мгновенные мощности равны

$$p_R = u_R i = U_{Rm} \sin(\omega t) I_m \sin(\omega t) = U_{Rm} I_m \sin^2 \omega t = U I (1 - \cos 2\omega t) \cos \varphi;$$

$$p_L = u_L i = U_{Lm} \sin(\omega t + 90^\circ) I_m \sin(\omega t) = U_{Lm} I_m \sin \omega t \cos \omega t = U_L I \sin 2\omega t;$$

$$p_C = u_C i = U_{Cm} \sin(\omega t - 90^\circ) I_m \sin(\omega t) = -U_{Cm} I_m \sin \omega t \cos \omega t = \\ = -U_C I \sin 2\omega t.$$

Мгновенная мощность  $R$ -элемента имеет 2 составляющие: постоянную  $UI \cos \varphi$  и переменную  $UI \cos 2\omega t = UI \cos 2\omega t \cos \varphi$ , изменяющуюся по косинусоидальному закону с частотой  $2\omega$ .

Мгновенные мощности реактивных элементов  $p_L$  и  $p_C$  переменные, изменяющиеся по синусоидальному закону с частотой  $2\omega$ , причем для индуктивности и емкости они имеют противоположные знаки.

Суммарная мгновенная мощность реактивных элементов

$$p_p = p_L + p_C = (U_L - U_C) I \sin 2\omega t = U_p I \sin 2\omega t = U I \sin \varphi \sin 2\omega t. \quad (2.68)$$

Суммарная мгновенная мощность всей цепи (рис. 2.21):

$$p = p_R + p_L + p_C = U I \cos \varphi - U I \cos \varphi \cos 2\omega t + U I \sin \varphi \sin 2\omega t = \\ = U I \cos \varphi - U I \cos(2\omega t + \varphi). \quad (2.69)$$

**Активная мощность.** Найдем мощность необратимых преобразований электрической энергии на участке цепи за период  $T$ :

$$P_{\text{cp}} = P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = U I \cos \varphi, \quad (2.70)$$

где  $p$  – выражение (2.69). При интегрировании учтено, что среднее значение гармонической функции двойной частоты за период равно нулю.

Из (2.70) следует, что *среднее за период значение мгновенной мощности* зависит от угла сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением на входе цепи и током в цепи и не равно нулю, если участок цепи имеет активное сопротивление. Эта величина (2.70) называется **активной мощностью** и обозначается буквой  $P$ .

Из (2.70) можно получить производные формулы для расчета активной мощности участка цепи с сопротивлением  $Z$ :

$$P = U I \cos \varphi = U_a I = I^2 Z \cos \varphi = R I^2 = G U^2. \quad (2.71)$$

Активная мощность измеряется в ваттах.

**Реактивная мощность.** Мгновенная мощность реактивных элементов  $p_p = p_L + p_C$  в среднем за период равна нулю, но в течение четверти периода она положительна, что физически означает накопление энергии в магнитном поле катушки или в электрическом поле конденсатора, а в течение следующей четверти периода – отрицательная, что соответствует обратному процессу передачи энергии источнику электрической энергии. Таким образом, имеет место процесс колебания энергии, но необратимых преобразований энергии нет.

Мощность колеблющейся энергии, в отличие от активной, называется **реактивной** и обозначается буквой  $Q$ . Количественно ее характеризуют амплитудным значением мгновенной мощности реактивных элементов цепи, и как следует из (2.68)

$$Q = U I \sin \varphi. \quad (2.72)$$

Единицу реактивной мощности называют вольт-ампер-реактивный (вар).

Для индуктивного элемента  $Q_L = U I > 0$ , т. к.  $\sin 90 = 1$ , а для емкостного  $Q_C = -U I$ , т. к.  $\sin(-90) = -1$ .

Если индуктивный и емкостный элементы соединить последовательно, то  $Q = Q_L - Q_C$ .

Из основной формулы реактивной мощности (2.72) можно получить производные формулы

$$Q = U I \sin \varphi = U_p I = I^2 Z \sin \varphi = I^2 X = B U^2. \quad (2.73)$$

**Полная мощность.** Кроме активной и реактивной мощности цепь синусоидального тока характеризуется полной мощностью, обозначаемой буквой  $S$ .

Под *полной мощностью* понимается максимально возможное значение активной мощности при заданных значениях  $U$  и  $I$ . Очевидно, что максимальной активной мощности цепи отвечает сдвиг фаз  $\varphi = 0$  и, следовательно,

$$S = UI. \quad (2.74)$$

Единице полной мощности присвоено название вольт-ампер (ВА).

Полная мощность указывается в паспорте электрических аппаратов переменного тока, называется **номинальной**  $S_n$  и определяется как произведение  $U_n$  на  $I_n$ :

$$S_n = U_n I_n.$$

Из (2.70), (2.72) и (2.74) можно указать связь между мощностями

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (2.75)$$

Можно также выразить угол сдвига фаз между напряжением и током через активную  $P$  и реактивную  $Q$  мощности

$$\varphi = \arctg Q/P. \quad (2.76)$$

Для облегчения запоминания всех формул, связанных с мощностями, строится треугольник мощностей (рис. 2.22).

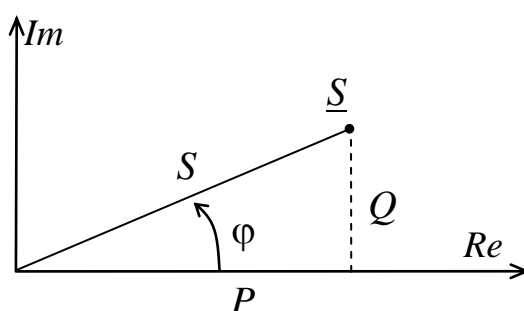


Рис. 2.22. Представление мощности в комплексной форме.  
Треугольник мощностей

**Мощность в комплексной форме.** Пусть  $\underline{U} = U e^{j\Psi_u}$  и  $\underline{I} = I e^{j\Psi_i}$ .

Рассмотрим комплексное соотношение:  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$ , где  $\underline{I}^*$  – сопряженный комплекс тока.  $\underline{I}^* = I e^{-j\Psi_i}$ , тогда

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\Psi_u} I e^{-j\Psi_i} = U I e^{j(\Psi_u - \Psi_i)} = U I e^{j\varphi} = S e^{j\varphi}. \quad (2.77)$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим

$$\underline{S} = U I \cos \varphi + j U I \sin \varphi = P + j Q. \quad (2.78)$$

Таким образом,  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + j Q$ , где  $P = \operatorname{Re} \underline{S} = \operatorname{Re}(\underline{U} \underline{I}^*)$ ,  $Q = \operatorname{Im} \underline{S} = \operatorname{Im}(\underline{U} \underline{I}^*)$ .

**Баланс мощностей.** Из закона сохранения энергии следует, что активная мощность всех источников цепи равна активной мощности всех приемников, т. е.

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{пр}} = \sum R I^2. \quad (2.79)$$

Можно показать, что алгебраическая сумма реактивных мощностей всех источников равна алгебраической сумме реактивных мощностей всех приемников, т. е.

$$\sum Q_{\text{ист}} = \sum Q_{\text{пр}} = \sum X I^2. \quad (2.80)$$

Так как равны активные и реактивные мощности источников и приемников, то равны и их полные мощности:

$$\sum S_{\text{ист}} = \sum S_{\text{пр}}. \quad (2.81)$$

Приведенные равенства называются уравнениями баланса мощностей.

В комплексной форме уравнение баланса мощностей имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \underline{S}_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^m \underline{S}_{k \text{ пр}}, \quad (2.82)$$

где  $n$  — число источников в цепи;  $m$  — число приемников в цепи;  $S_{k \text{ ист}} = \underline{U}_{k \text{ ист}} \underline{I}_{k \text{ ист}}^*$  — мощность  $k$ -го источника;  $S_{k \text{ пр}} = \underline{U}_{k \text{ пр}} \underline{I}_{k \text{ пр}}^* = I_k^2 \underline{Z}_k$  — мощность  $k$ -го приемника;  $\underline{Z}_k = R_k + jX_k$  — комплексное сопротивление  $k$ -той ветви электрической цепи.

**Коэффициент мощности. Способы повышения коэффициента мощности.** Коэффициентом мощности называют отношение активной мощности  $P$  к полной мощности  $S$ :

$$\lambda = \cos \varphi = P / S. \quad (2.83)$$

Коэффициент мощности показывает, какая часть электрической энергии необратимо преобразуется в другие виды энергии, и, в частности, используется на выполнение полезной работы.

Заводом-изготовителем предусматривается номинальный режим эксплуатации электрических аппаратов. Например, электрический генератор энергетически и экономически выгодно эксплуатировать так, чтобы совершаемая им работа, т. е. вырабатываемая электрическая энергия, была максимальной.

Поскольку совершаемая в электрической цепи работа определяется активной мощностью  $P$ , то нужно стремиться обеспечить такой режим работы генератора или другого электрического аппарата, при котором активная мощность была бы максимальной.

При заданном значении полной мощности  $S_H = U_H I_H$  активная мощность принимает максимальное значение при  $\lambda = \cos \varphi = 1$ ,  $P = P_{\max} = S_H \cos \varphi = S_H$ .

Именно в режиме максимальной активной мощности ток  $I$  и напряжение  $U$  совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ), при этом реактивная мощность  $Q = U I \sin \varphi = 0$  и, следовательно, генератор осуществляет только необратимые преобразования энергии и не участвует в колебательных процессах обмена энергией с приемниками.

Для повышения коэффициента мощности и, следовательно, для повышения экономических показателей системы электроснабжения предприятий применяются способы, которые сводятся либо к уменьшению реактивной мощности  $Q_L$ , либо к компенсации  $Q_L$  мощностью  $Q_C$  (противоположного знака). В первом случае стараются избегать работы электрооборудования на холостом ходу или с недогрузкой, не устанавливать оборудование со значительной реактивной мощностью  $Q_L$ , а во втором – устанавливают батареи конденсаторов, либо применяют синхронные двигатели, позволяющие регулировать реактивную мощность и даже вырабатывать реактивную мощность  $Q_C$  для того, чтобы она компенсировала в сети мощность  $Q_L$ .

### ***2.1.12. Расчет линейных цепей однофазного синусоидального тока в символической форме***

Все методы расчета цепей постоянного тока применимы в символической (комплексной) форме к расчету цепей синусоидального тока. При этом в любом из методов на начальном этапе размечают схему (узлы, токи в ветвях, контурные токи в независимых контурах) и, определив комплексные сопротивления ветвей по исходным данным, от исходной схемы переходят к комплексному эквиваленту, где вместо  $RLC$ -элементов, мгновенных токов, напряжений и ЭДС ( $i, u, e$  – величин)



применяются  $\underline{Z}$ -параметры, комплексные действующие токи, напряжения и ЭДС ( $\underline{I}$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{E}$  – величины).

**Метод эквивалентных преобразований.** Проиллюстрируем данный метод на примере электрической цепи на рис. 2.23, а с тремя ветвями.

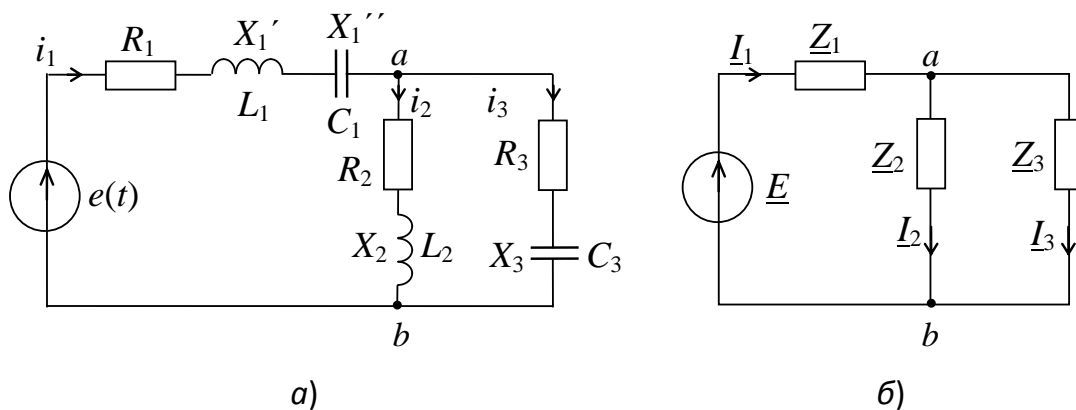


Рис. 2.23. К расчету линейной цепи синусоидального тока методом эквивалентных преобразований в комплексной форме:  
а – исходная схема; б – эквивалентная схема

Для определения токов в ветвях этой цепи:

– размечают узлы ( $a$ ,  $b$ ) и задают направление токов в ветвях ( $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ );

– определяют комплексные сопротивления ветвей и переходят к эквивалентной схеме на рис. 2.23, б, где

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_1' - X_1''), \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_2, \quad \underline{Z}_3 = R_3 - jX_3;$$

– определяют комплексное входное сопротивление  $\underline{Z}_{\hat{a}\hat{b}}$  всей цепи и находят комплексный ток  $\underline{I}_1$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}, \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{вх}}};$$

– определяют токи  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  по формулам «разброса» токов [см. (1.23)]:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}. \quad (2.84)$$

Минуя этап разметки исходной схемы и перехода к комплексному эквиваленту, рассмотрим различные методы расчета цепей синусоидального тока с несколькими источниками ЭДС в символической форме.

**Метод непосредственного применения законов Кирхгофа.**  
 Пусть электрическая цепь задана в комплексных величинах и параметрах (рис. 2.24).

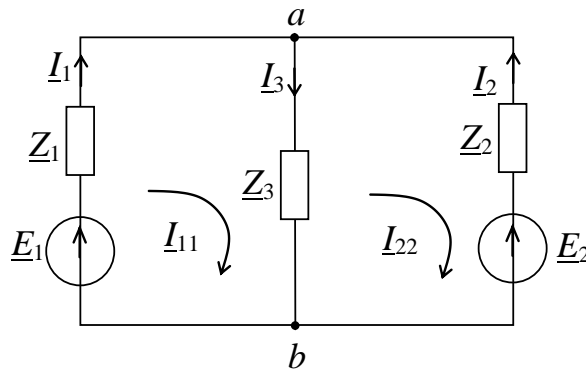


Рис. 2.24. Схема электрической цепи синусоидального тока с двумя источниками ЭДС (к расчету методом законов Кирхгофа в комплексной форме)

Цепь состоит из трех ветвей, поэтому требуется составить три уравнения:

- по первому закону Кирхгофа для узла  $b$ :  $-\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ ;
- по второму закону Кирхгофа:
  - для левого контура:  $\underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = \underline{E}_1$ ;
  - для правого контура:  $\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = \underline{E}_2$ .

Таким образом, система уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0; \\ \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + 0 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 &= \underline{E}_1; \\ 0 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 &= \underline{E}_2. \end{aligned} \right\}$$

Подставив заданные величины  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ ,  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{E}_2$ , определяют комплексные токи в ветвях, например, по формулам Крамера или методом Гаусса.

**Метод контурных токов.** Введя в рассмотрение контурные токи  $\underline{I}_{11}$ ,  $\underline{I}_{22}$ , составляют систему уравнений для этих токов по второму закону Кирхгофа для каждого из независимых контуров.

Для цепи на рис. 2.24 имеем

$$\left. \begin{aligned} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \underline{I}_{11} - \underline{Z}_3 \underline{I}_{22} &= \underline{E}_1; \\ -\underline{Z}_3 \underline{I}_{11} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_{22} &= -\underline{E}_2. \end{aligned} \right\}$$

Подставив известные величины  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{E}_1, \underline{E}_2$  и решив систему относительно токов  $\underline{I}_{11}, \underline{I}_{22}$ , определяют токи в ветвях:

$$\underline{I}_{11} = \underline{\Delta}_1 / \Delta, \quad \underline{I}_{22} = \underline{\Delta}_2 / \Delta,$$

$$\text{где } \underline{\Delta} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 \\ -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{vmatrix}; \quad \underline{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \underline{E}_1 & -\underline{Z}_3 \\ -\underline{E}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{vmatrix}; \quad \underline{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & \underline{E}_1 \\ -\underline{Z}_3 & -\underline{E}_2 \end{vmatrix}.$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11}, \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_{22}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22}.$$

**Метод двух узлов.** Для схемы на рис. 2.24:

– определяют межузловое напряжение

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \quad (2.85)$$

где  $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1, \underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2, \underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3$ ;

– определяют токи в ветвях по закону Ома в обобщенной форме:

$$\underline{I}_1 = (\underline{E}_1 - \underline{U}_{ab}) \underline{Y}_1, \quad \underline{I}_2 = (\underline{E}_2 - \underline{U}_{ab}) \underline{Y}_2, \quad \underline{I}_3 = \underline{U}_{ab} \underline{Y}_3. \quad (2.86)$$

**Метод наложения токов.** Для цепи на рис. 2.24 составляют две вспомогательные схемы (по числу источников ЭДС) с одним источником ЭДС в каждой (рис. 2.25, а, б).

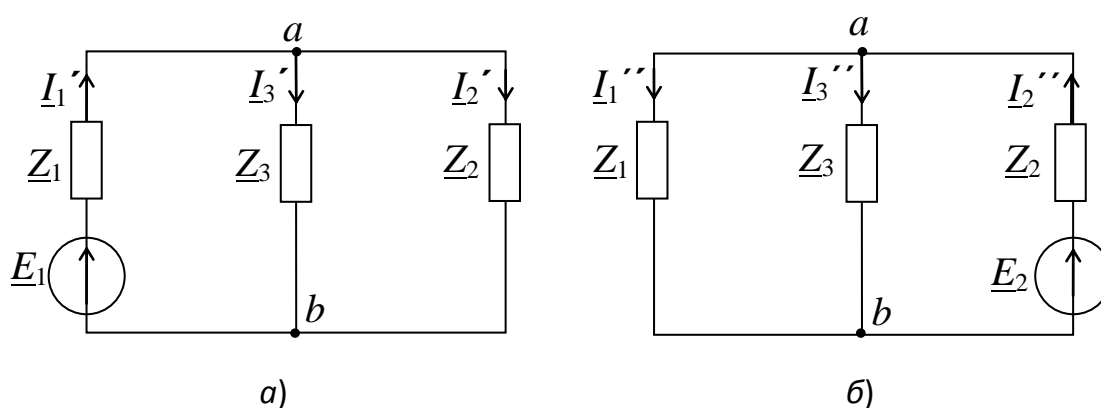


Рис. 2.25. Вспомогательные схемы с частичными токами и одним источником ЭДС (к иллюстрации метода наложения токов в комплексном представлении)

– определяют токи в схеме на рис. 2.25, а:

$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}, \quad \underline{I}_2' = \underline{I}_1' \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}, \quad \underline{I}_3' = \underline{I}_1' \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3};$$

– определяют токи в схеме на рис. 2.25, б):

$$\underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}}, \quad \underline{I}_1'' = \underline{I}_2'' \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}, \quad \underline{I}_3'' = \underline{I}_2'' \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3};$$

– определяют токи, в ветвях исходной цепи суммируя алгебраически токи в соответствующих ветвях вспомогательных схем:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1''; \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_2' + \underline{I}_2''; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_3' + \underline{I}_3''.$$

**Метод эквивалентного генератора.** Определим, к примеру, ток  $\underline{I}_1$  в ветви электрической цепи на рис. 2.24 по формуле

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_\Gamma + \underline{E}_1}{\underline{Z}_\Gamma + \underline{Z}_1}, \quad (2.87)$$

где  $\underline{E}_\Gamma$ ,  $\underline{Z}_\Gamma$  – комплексные параметры эквивалентного генератора.

Для определения  $\underline{E}_\Gamma$  составляют вспомогательную цепь (рис. 2.26, а) с разомкнутой первой ветвью:

$$\underline{E}_\Gamma = \underline{U}_{ba}^{xx} = \underline{\varphi}_b^{xx} - \underline{\varphi}_a^{xx} = -\underline{I}^{xx} \underline{Z}_3,$$

где  $\underline{I}^{xx} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$

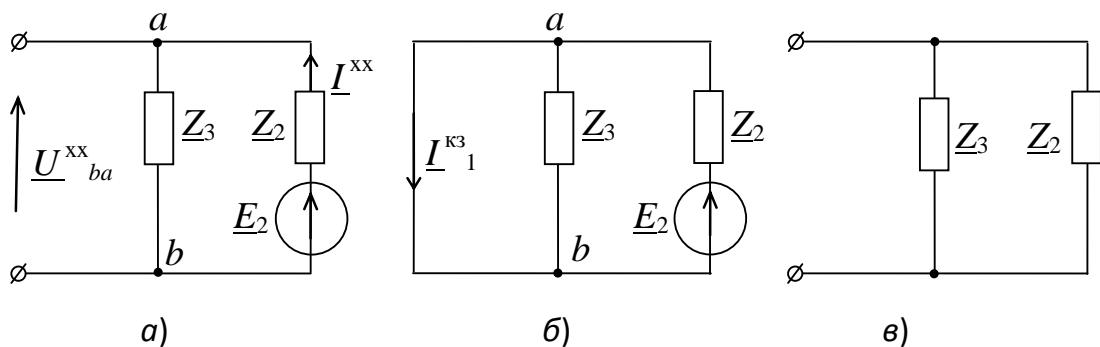


Рис. 2.26. К расчету линейной цепи синусоидального тока методом эквивалентного генератора в комплексной форме:  
а – исходная схема; б, в – вспомогательные схемы

Для определения  $\underline{Z}_\Gamma$  можно воспользоваться двумя способами:

– закоротив первую ветвь на рис. 2.26, б определяют ток  $I_1^{кз}$  короткого замыкания  $I_1^{кз} = \frac{E_2}{Z_2}$  и затем определяют

$$\underline{Z}_\Gamma = \frac{U_{ba}^{xx}}{I_1^{кз}} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3};$$

– оставив разомкнутой первую ветвь, убирают источник ЭДС  $E_2$  (рис. 2.26, в) и находят  $\underline{Z}_\Gamma$  по закону эквивалентных преобразований при параллельном соединении  $\underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_3$ :  $\underline{Z}_\Gamma = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$ .

Подставив найденные значения параметров  $E_\Gamma$  и  $\underline{Z}_\Gamma$ , определяют ток  $I_1$  по формуле (2.87).

### **2.1.13. Векторно-топографическая диаграмма напряжений**

Помимо обычных векторных диаграмм, при анализе цепей синусоидального тока применяются топографические диаграммы, которые показывают распределение комплексных потенциалов всех характерных точек цепи (потенциальных узлов, точек последовательного соединения элементов в ветвях) на комплексной плоскости. Для построения такой диаграммы необходимо потенциал одной из точек цепи принять равным нулю и определить относительно этой точки комплексные потенциалы всех остальных точек. После нанесения потенциалов в виде совокупности точек на комплексную плоскость эти точки попарно соединяют между собой так, что каждому отрезку отвечает вектор, отображающий комплексное напряжение на том или ином элементе цепи. Направление вектора напряжения совпадает с направлением возрастания потенциала на схеме (против направления тока, протекающего через рассматриваемый элемент, либо по направлению ЭДС).

Как правило, векторно-топографическую диаграмму напряжений совмещают с векторно-лучевой диаграммой комплексных токов в ветвях цепи.

Проиллюстрируем методику построения такой диаграммы на примере цепи на рис. 2.27, а.

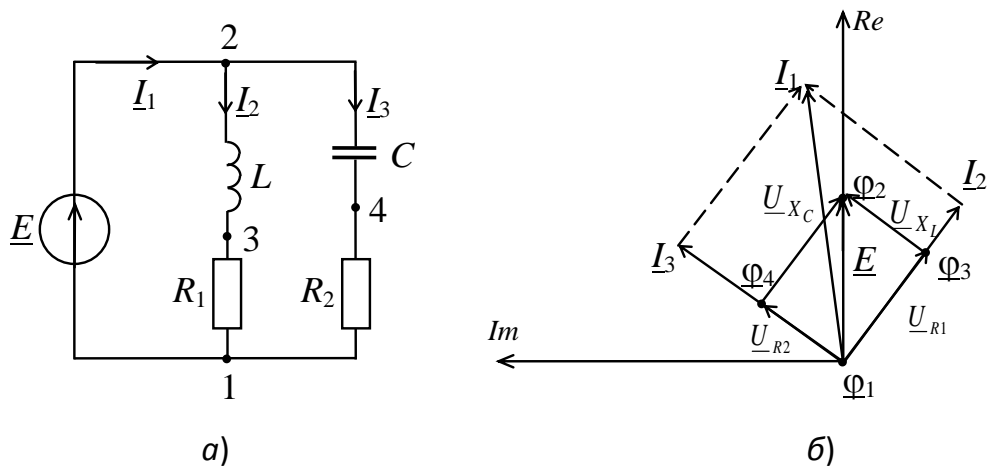


Рис. 2.27. К построению векторно-топографической диаграммы напряжений: а – схема цепи; б – векторно-топографическая диаграмма

Определяем токи в ветвях:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R_1 + jX_L}; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{E}}{R_2 - jX_C}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

Приняв, что  $\underline{\varphi}_1 = 0$ , определяем комплексные потенциалы точек 2, 3, 4:

$$\underline{\varphi}_2 = \underline{\varphi}_1 + \underline{E} = \underline{E}, \quad \underline{\varphi}_3 = \underline{\varphi}_1 + \underline{I}_2 R_1, \quad \underline{\varphi}_4 = \underline{\varphi}_1 + \underline{I}_3 R_2. \quad (2.88)$$

Задав масштабы  $m_U$ ,  $m_I$ , строим диаграмму (рис. 2.27, б), где начальная фаза ЭДС  $\psi_e$  принята равной нулю. Отмечаем точки  $\underline{\varphi}$  на комплексной плоскости, и каждую пару точек (между которыми в схеме включен элемент цепи) соединяем между собой прямой линией. Затем каждый отрезок размечаем как вектор напряжения на соответствующем элементе цепи стрелкой (в направлении возрастания потенциала) и знаком  $\underline{E}$ , либо  $\underline{U}_R$ , либо  $\underline{U}_X$ .

### 2.1.14. Расчет линейных цепей синусоидального тока при наличии в них магнитосвязанных катушек индуктивности

В состав электрических цепей синусоидального тока могут входить катушки индуктивности, магнитосвязанные с другими катушками. Поток одной из них пронизывает другие и наводит в них ЭДС взаимной индукции, которые должны быть учтены в расчетах.

При составлении уравнений для магнитосвязанных цепей необходимо знать, согласно или встречно направлены потоки

самоиндукции и взаимной индукции. Правильное заключение об этом можно сделать, если известно направление намотки катушек на сердечнике

и выбрано положительное направление токов в них.

На рис. 2.28, *а* катушки включены согласно, а на рис. 2.28, *б* – встречно.

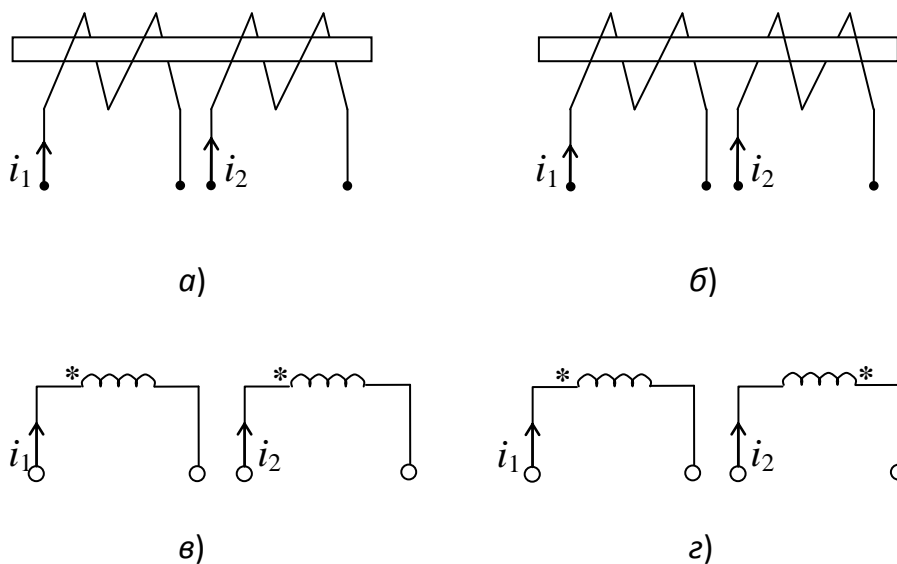


Рис. 2.28. Магнитно-связанные катушки индуктивности:  
*а, б* – согласное и встречное включение катушек;  
*в, г* – условное обозначение на схемах

На электрических схемах сердечники катушек не показывают, а одноименные зажимы (например, начала катушек) помечают звездочками. Схема, представленная на рис. 2.28, *в* эквивалентна схеме, приведенной на рис. 2.28, *а*, а схема, представленная на рис. 2.28, *г* – схеме на рис. 2.28, *б*.

Если на электрической схеме токи двух магнитосвязанных катушек одинаково (по направлению) ориентированы относительно одноименно обозначенных звездочками зажимов, то имеет место согласное включение, в противном случае – встречное.

Методику составления уравнений по законам Кирхгофа при расчете магнитосвязанных цепей рассмотрим на примере электрической цепи на рис. 2.29.

Наличие магнитной связи между катушками обозначают дугой и буквой *M*.

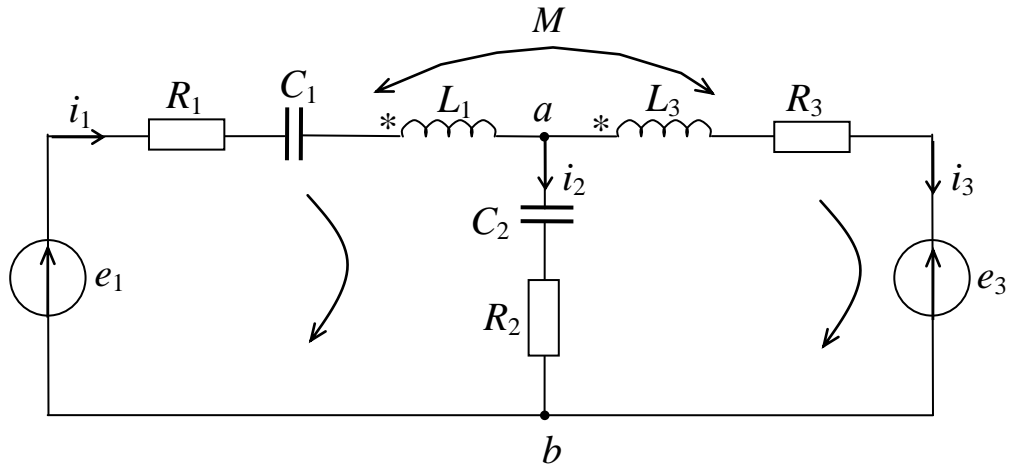


Рис. 2.29. Схема цепи с магнито-связанными индуктивностями (к иллюстрации записи уравнений по законам Кирхгофа)

Произвольно выбирают направление токов в ветвях и положительное направление обхода контуров (рис. 2.29).

Уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных величин имеют вид

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 &= e_1; \\ -i_2 R_2 - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + L_3 \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_3 R_3 &= -e_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

где  $M$  – взаимная индуктивность.

В комплексной форме эти уравнения записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0; \\ \underline{I}_1 \left( R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} + j \omega L_1 \right) + \underline{I}_2 \left( R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 j \omega \dot{M} &= \underline{E}_1; \\ \underline{I}_1 j \omega \dot{M} - \underline{I}_2 \left( R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 \left( R_3 + j \omega L_3 \right) &= -\underline{E}_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

Для обоснования метода опытного определения параметров  $M$  и  $K$  рассмотрим согласное и встречное включение двух катушек индуктивности (рис. 2.30).



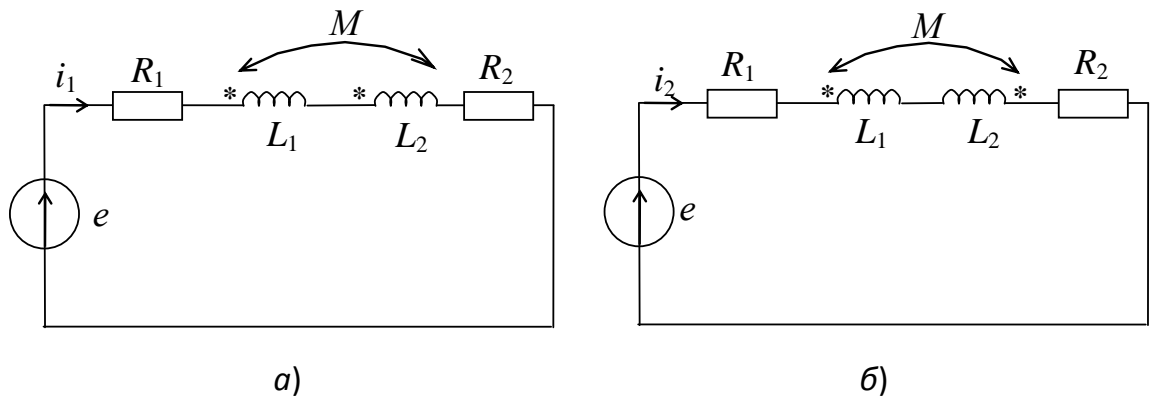


Рис. 2.30. К обоснованию метода опытного определения  $M$  и  $K$ :  
 а – согласное включение индуктивностей;  
 б – встречное включение индуктивностей

При согласном включении (рис. 2.30, а) уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид

$$\underline{I}_1(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) = \underline{E} \text{ или } \underline{I}_1 \underline{Z}_{\text{сог}} = \underline{E},$$

где  $\underline{Z}_{\text{сог}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = R_{\text{сог}} + jX_{\text{сог}}$ .

$$R_{\text{сог}} = R_1 + R_2, \quad X_{\text{сог}} = \omega(L_1 + L_2 + 2M). \quad (2.91)$$

При встречном включении (рис. 2.30, б) эти уравнения имеют вид

$$\underline{I}_2(R_1 + R_2 + j(L_1 + L_2 - 2M)) = \underline{E} \text{ или } \underline{I}_2 \underline{Z}_{\text{вст}} = \underline{E},$$

где  $\underline{Z}_{\text{вст}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = R_{\text{вст}} + jX_{\text{вст}}$ .

$$R_{\text{вст}} = R_1 + R_2, \quad X_{\text{вст}} = \omega(L_1 + L_2 - 2M). \quad (2.92)$$

Векторные диаграммы для согласного и встречного включения катушек приведены на рис. 2.31, а, б соответственно.

Имея прибор для измерения индуктивностей, измеряют  $L_1$  и  $L_2$ , затем соединяют эти катушки согласно и измеряют  $L_{\text{сог}}$ , а затем – встречно, и измеряют  $L_{\text{вст}}$ .

Из (2.91), (2.92) следует, что  $L_{\text{сог}} = L_1 + L_2 + 2M$ ,  $L_{\text{вст}} = L_1 + L_2 - 2M$  и, следовательно,

$$M = (L_{\text{сог}} - L_{\text{вст}}) / 4. \quad (2.93)$$

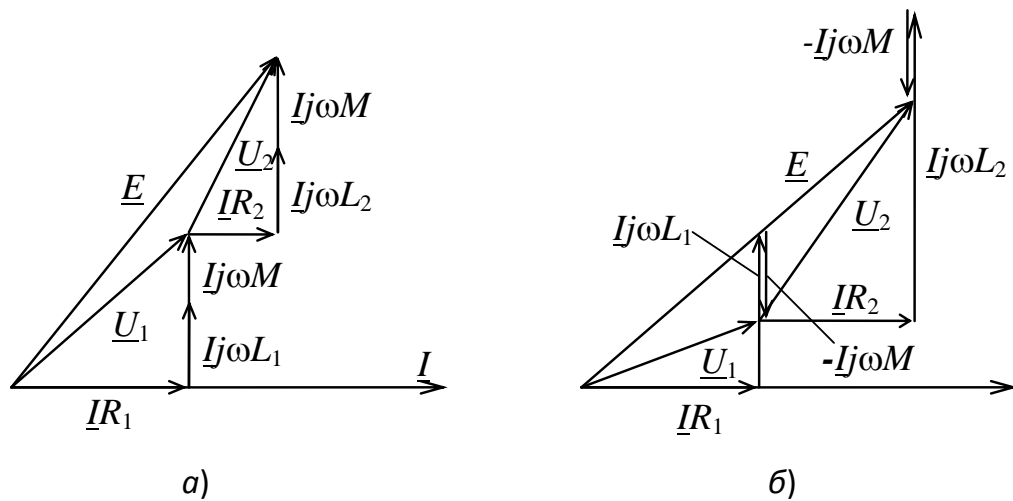


Рис. 2.31. Векторные диаграммы цепей рис. 2.30:  
 а – для согласного включения индуктивностей;  
 б – для встречного включения индуктивностей

Зная  $L_1$ ,  $L_2$  и  $M$ , определяют коэффициент связи по (2.22). При расчете электрических цепей, содержащих магнитосвязанные катушки индуктивности, часто применяется расчетный прием, называемый развязыванием магнитосвязанных цепей. Суть его состоит в том, что исходную схему путем введения дополнительных индуктивностей и изменения имеющихся преобразуют так, что магнитная связь между всеми элементами в преобразованной схеме (в эквивалентной схеме) отсутствует.

Так как преобразование осуществляют на основе составленных по законам Кирхгофа уравнений для исходной схемы, то вновь полученная (эквивалентная) схема и исходная схема в расчетном смысле полностью эквивалентны.

Составим, к примеру, схему, эквивалентную схеме на рис. 2.29. С этой целью во втором уравнении (2.90) заменим  $I_3$  на  $I_1 - I_2$ , а в третьем уравнении заменим  $I_1$  на  $I_2 + I_3$ , что отвечает исключению тока, который не течет в левом и правом контуре соответственно.

В итоге получим

$$I_1 \left[ R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} + j \omega (L_1 + M) \right] + I_2 \left( R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} - j \omega M \right) = E_1;$$

$$- I_2 \left[ R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} - j \omega M \right] + I_3 (R_3 + j \omega L_3 + j \omega M) = -E_3.$$

Этим уравнениям соответствует схема на рис 2.32.

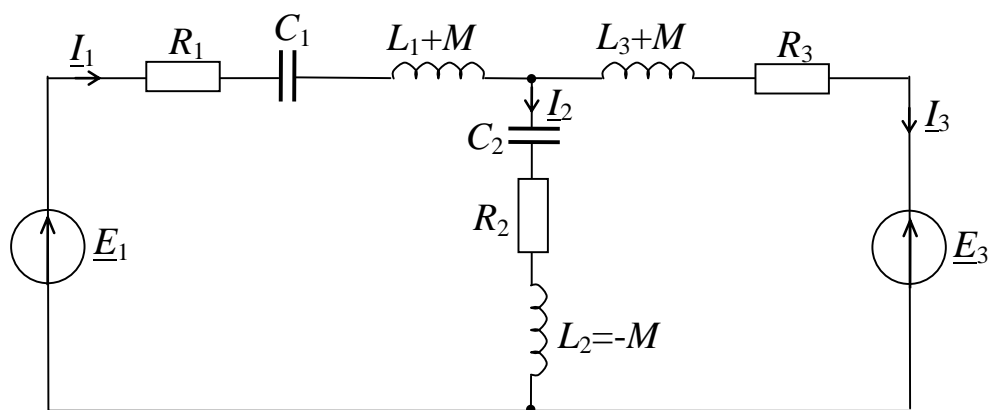


Рис. 2.32. Схема цепи, эквивалентной рис. 2.29, не содержащая связанных магнитно индуктивностей

Из сравнения схем, представленных на рис. 2.32 и 2.29, следует, что  $L_1$  преобразовалось в  $L_1 + M$ ,  $L_3$  – в  $L_3 + M$ , а во второй ветви появилась  $L_2 = -M$ .

Если бы на рис. 2.29 катушки были бы включены встречно, то при развязывании они бы преобразовались в  $L_1 - M$ ,  $L_3 - M$  и в  $L_2 = M$ .

Если в расчетах величины  $L_1$ ,  $L_2$  и  $K$  заданы, то взаимную индуктивность находят по следующим формулам:

$$M = K\sqrt{L_1 L_2} \text{ или } X_M = K\sqrt{X_{L1} X_{L2}}. \quad (2.94)$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение активной, реактивной и полной мощности. Приведите формулы для расчета этих мощностей.
2. Запишите формулы для расчета комплексной мощности.
3. Как рассчитать комплексную мощность источников ЭДС электрической цепи и всех приемников (ветвей)?
4. Начертите треугольник мощностей и установите формулы связи между  $P$  и  $S$ ,  $Q$  и  $S$ ,  $S$  и  $P$ ,  $Q$ .
5. Запишите уравнение баланса мощностей в комплексной форме для электрической цепи синусоидального тока.
6. Что понимают под коэффициентом мощности, какое экономическое значение он имеет, и какие методы используются для его повышения?
7. Поясните методику расчета разветвленной цепи синусоидального тока с одним источником (метод эквивалентных преобразований).

8. Укажите, в чем сходство и в чем различие расчета цепей при постоянном и при синусоидальном токе.

9. Поясните порядок построения векторно-топографической диаграммы напряжений, совмещенной с векторно-лучевой диаграммой токов.

10. Дайте определение согласного и встречного включения катушек индуктивности.

11. Запишите выражение для комплексных сопротивлений двух последовательно соединенных катушек индуктивности с параметрами  $L_1, R_1, L_2, R_2$  при наличии магнитной связи между ними для согласного и встречного включения.

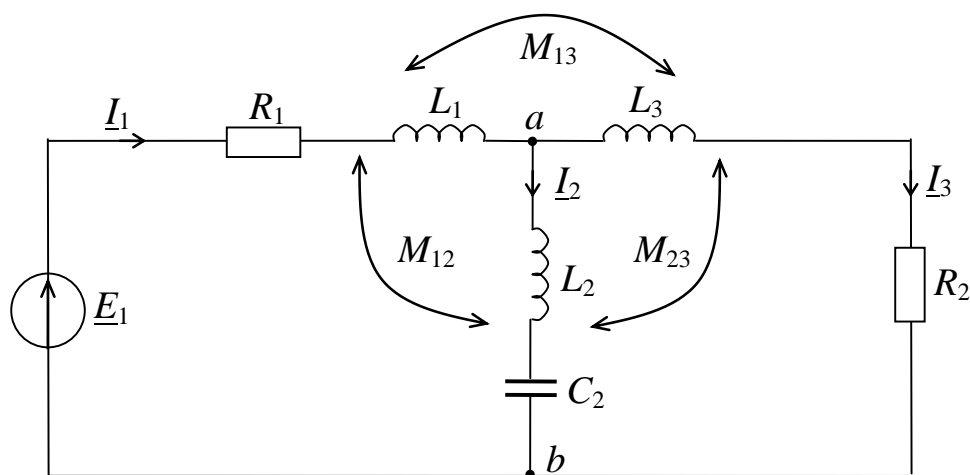


Рис. 2.33

12. Запишите систему уравнений для мгновенных величин электрической цепи на рис 2.33, для комплексных величин.

13 Дайте определение коэффициента связи  $K$  и запишите выражение его через  $L_1, L_2$  и  $M$ .

14. Укажите метод опытного определения  $M$  и  $K$ . Приведите формулы, связывающие эти величины с измеряемыми величинами.